

ЯНВАРЬ/ФЕВРАЛЬ

ISSN 0130-2221  
2010 · №1

# КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



*В январе 2010 года  
родился журнал  
«Квант»*



# журнал© Квант ЯНВАРЬ 2010 №1 ФЕВРАЛЬ 2010

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна), ИФТТ РАН  
Издатель — ООО НПП ОО «Бюро Квантум»

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**С.С.Кротов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов, А.Н.Виленин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин, Н.П.Долбилин (*заместитель главного редактора*), В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, А.В.Жуков, А.Р.Зильберман, В.В.Кведер (*заместитель председателя редколлегии*), П.А.Кожевников, В.В.Козлов (*заместитель председателя редколлегии*), С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, В.М.Уроев, А.И.Черноуцан (*заместитель главного редактора*)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков, В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков, Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**А.Н.Колмогоров**

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский, А.И.Маркушевич, М.Д.Миллионщиков, Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Товарный знак «Журнал «Квант» является собственностью ООО НПП ОО «Бюро Квантум»  
© 2010, РАН,  
Фонд Осипьяна, журнал «Квант»

- 2 Многогранный Делоне. *Н.Долбилин*  
8 Что такое ЯМР-томография? *А.Варламов, А.Ригамонти*

## НАНОТЕХНОЛОГИИ

- 12 Как управлять светом с помощью магнитного поля.  
*В.Белотелов*

## НОВОСТИ НАУКИ

- 17 Нобелевская премия за «школьную» физику

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МИР

- 19 Интервью с Н.Н.Константиновым

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 24 Задачи М2161–М2168, Ф2168–Ф2174  
25 Решения задач М2139–М2145, Ф2153–Ф2159

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Нано...

## К М Ш

- 34 Задачи  
35 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»  
35 Иррациональность корней из 2, 3, 5 и 6. *А.Спивак*  
37 Подвиг юного Бертольда. *А.Котова*

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 39 Красное небо, синяя луна. *А.Стасенко*

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 41 Две простые, но не вполне тривиальные формулы.  
*М.Каганов*

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 45 Описанные четырехугольники и ломаные. *Н.Белухов, П.Кожевников*

## ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 50 Динамика движения по окружности. *А.Черноуцан*

## ОЛИМПИАДЫ

- 54 XXXI Турнир городов

## ИНФОРМАЦИЯ

- 55 Современная механика и робототехника для школьников  
56 Заочная школа МИФИ  
57 Конкурс «Свободный полет»  
57 Заочное отделение Малого мехмата МГУ  
58 Заочная школа «Юный математик»  
60 Ответы, указания, решения

## НА ОБЛОЖКЕ

- I-III «Кванту» — 40 лет  
IV Прогулки с физикой



# Многогранный Делоне

**Н.ДОЛБИЛИН**

## Вместо предисловия

Красивая горная вершина, примыкающая к Белухе, высочайшей вершине Алтая, названа пиком Делоне в честь Бориса Николаевича Делоне – выдающегося математика и удивительного человека

Борис Николаевич Делоне был крупным математиком, и математическое творчество является безусловно самой яркой гранью этого замечательного ученого. Но показать лишь эту грань многосторонне одаренной

*15 марта 2010 года исполняется 120 лет со дня рождения Бориса Николаевича Делоне. К этой дате приурочена наша статья, которая является существенно переработанным и дополненным вариантом статьи «Пик Делоне», опубликованной в «Кванте», № 3 за 1986 год.*

личности – все равно что из сложного полифонического произведения выделить его основную тему в отрыве от других тем. В этом смысле жизнь Б.Н.Делоне, а прожил он 90 лет, можно сравнить с цельным произведением искусства. Эта жизнь была чрезвычайно насыщена. Если бы мы попытались перечислить яркие моменты и факты из его биографии, то хронологически одним из первых шел бы 1897 год – семилетний мальчик читает в подлиннике «Фауста» Гете, знает наизусть отдельные главы поэмы, пишет маслом первые пейзажи. Где-то в конце списка был бы отмечен 1975 год – 6 июля Борис Николаевич на 86-м году жизни проводит ночь на Тянь-Шане при 25-градусном морозе на высоте 4200 метров на леднике под семитысячником Хан-Тенгри. Утром на вертолете он спуска-



ется к озеру Иссык-Куль, откуда тут же перелетает во Фрунзе, ныне Бишкек, где стоит 40-градусная жара. Проведя несколько часов в очереди в аэропорту у касс, Борис Николаевич не без помощи академического удостоверения добывает билет на самолет и поздно вечером того же дня оказывается в подмосковном аэропорту, откуда ему предстоит добраться до дачи, расположенной в окрестностях подмосковного Абрамцева. Прибыв на ближайшую станцию последней электричкой глубокой ночью, Борис Николаевич с тяжелым рюкзаком идет к даче через лес, сбивается с пути. Проплутав в ночном лесу, он сбрасывает в укромном месте рюкзак и налегке к рассвету находит свой дом.

Эти биографические детали показывают, что, с одной стороны, разностороннее дарование у Б.Н.Делоне проявилось в очень раннем возрасте. С другой стороны, до преклонных лет он сохранил юношеский темперамент, а незаурядное физическое здоровье позволяло ему заниматься с полной отдачей не только научной работой, но и серьезным туризмом. Геометрия чисел, математическая кристаллография, дискретная геометрия – в этих областях Борисом Николаевичем были написаны работы, когда ему было уже за восемьдесят. Алтай и Кавказ, Карпаты и Тянь-Шань – такова география путешествий, совершенных им в преклонном возрасте.

### Чудо-ребенок

Борис Николаевич Делоне родился 15 марта 1890 года в Санкт-Петербурге в семье известного профессора математики и механики, автора очень хороших университетских учебников Николая Борисовича Делоне. Род Делоне происходил из Франции. Прадед Б.Н. Делоне, Пьер Делоне (Pierre Delaunay), был доктором в наполеоновской армии, пленен во время войны 1812 года. После освобождения вернулся во Францию, но, влюбленный в прекрасную девушку из знатного русского рода, вернулся в Россию, женился и остался здесь навсегда...<sup>1</sup>

Борис был многосторонне одаренным ребенком и получил, как говорили тогда, прекрасное воспитание. Его занятия музыкой были весьма основательны: он играл многие пьесы Баха и Моцарта, все сонаты Бетховена, много сочинял сам. Учитель музыки видел в нем музыкальную одаренность и рекомендовал непременно поступать в консерваторию по классу композиции. Но не меньше оснований было и у преподавателя рисования, когда он настаивал на том, чтобы Борис поступал в художественную академию. Его занятия рисованием, живописью были пронизаны талантом и серьезным отношением, портреты близких, выполненные в карандаше, поражают сходством.

Пока учителя и родители размышляют о будущем Бориса, мальчик не теряет времени. Он путешествует

<sup>1</sup> То, что Б.Н.Делоне якобы был праправнуком коменданта Бастилии маркиза Делоне (Delaunay) – первой жертвы французской революции 1789 года, впоследствии не подтвердилось: согласно исследованиям, проведенным А.С.Шаровым, известным астрономом и зятем Б.Н.Делоне, предки Бориса Николаевича происходили из другого рода Делоне.



Б.Н.Делоне собирается в лыжный поход (начало 1970-х годов)

в горы и пишет пейзажи, занимается музыкой и играет в футбол, воспроизводит в карандаше «Тайную вечерю» Леонардо да Винчи и лазает по деревьям (с младшей сестрой на плечах для нагрузки), наблюдает за звездным небом и ставит физические опыты. Свою комнату он превратил в физическую лабораторию, в которой немало устройств было сделано им самим. Много лет спустя Делоне часто с чувством гордости вспоминал о маленьких хитростях, которые позволили ему получить с помощью лейденской банки «в-о-о-о-т такую искру» (это «в-о-о-о-т» сопровождалось красно-речивым жестом). Увлекаясь астрономией, он построил телескоп, зеркало для которого шлифовал сам. Рассказывая об этом, Борис Николаевич никогда не забывал добавлять: «шлифовать зеркало из бронзы было глупо – и трудоемко, и быстро тускнело».

Нельзя не упомянуть еще об одном увлечении Б.Н.Делоне в школьные годы. Его отец Николай Борисович был дружен со знаменитым ученым Николаем Егоровичем Жуковским, «отцом русской авиации». Под его влиянием Николай Борисович Делоне в 1907 году (он тогда работал профессором в Киевском политехническом институте) организовал в Киеве первый в России планерный кружок. Семнадцатилетний Борис стал одним из членов кружка и в течение следующих двух лет построил один за другим пять планеров, постоянно совершенствуя их. Последний, пятый, планер был наиболее удачным. Однажды кинематографисты, при-



*Крайний слева – Б.Н.Делоне, крайняя справа – его жена М.Г.Делоне, в центре – известный математик академик Я.В.Успенский, его жена и сестра (1924 год)*

ехавшие снять материал о кружке, уговорили Бориса, несмотря на сильный ветер, показать полет. Порыв ветра опрокидывает планер, и авиатор падает примерно с 15-метровой высоты, к счастью, на глубоко вспаханное поле. С точки зрения современных представлений об авиации, достижения кружка кажутся наивными: полеты на несколько десятков метров, запуски летом при помощи лошади, жгута, велосипеда, а зимой – при помощи санок. Но, заметим, это было время зарождения авиации, и деятельность кружка носила пионерский характер. Работа кружка оказала влияние на развитие отечественного авиастроения. Одним из кружковцев был Игорь Сикорский, который впоследствии, получив необходимые средства, построил огромный по тем временам 4-моторный самолет, знаменитый в истории российского самолетостроения под названием «Илья Муромец». После октябрьской революции И.Сикорский эмигрировал в США, где со временем стал знаменитым конструктором вертолетов. Один из вертолетов Сикорского совершил трансатлантический перелет. Отметим также еще один любопытный эпизод, связанный с кружком. Крупнейший наш авиаконструктор Андрей Николаевич Туполев, рассказывая в своих мемуарах об огромном значении, которое имело для него знакомство с Жуковским, отмечал, что познакомил его, тогда еще студента, с Жуковским именно Б.Н.Делоне.

Прежде чем обсудить место, которое занимала математика в жизни Бориса Делоне в его детские годы, следует отметить еще одно увлечение, которое продолжалось всю жизнь. Это увлечение – альпинизм – впервые проявилось у Бориса Николаевича в возрасте 12–15 лет в Швейцарских Альпах, куда в начале 1900-х годов семья Делоне выезжала на летние каникулы. Позже Делоне рассказывал о своих восхождениях и походах в окрестностях вершин Монте-Роза и Маттерхорн над Церматом в Валлийских Альпах.

Математическое дарование Делоне проявилось весьма рано. В 12 лет он был знаком с основами математи-

ческого анализа, чуть позднее приступил к изучению алгебры, теории чисел. Обстановка в семье способствовала развитию математического таланта. Отец, к примеру, в 1904 году взял сына на Международный конгресс математиков в Гейдельберг, где 14-летний Борис видел Гильберта и Минковского, присутствовал на их лекциях. Для будущей научной работы Бориса Николаевича оказалось важным, что в начале 1900-х годов его отец работал профессором Варшавского университета<sup>2</sup> одновременно с выдающимся математиком Георгием Феодосьевичем Вороным. Г.Ф.Вороной (1868–1908) был одним из самых блестящих представителей знаменитой Петербургской школы теории чисел. Николай Борисович подружился с выдающимся математиком, и Вороной стал частым гостем в доме Делоне. Борис Николаевич вспоминал, что когда беседа между отцом и Вороным затягивалась допоздна, то он, мальчик, уже «находясь в кровати в своей комнате, прислушивался к их разговору через полуприкрытую дверь, ведущую в залу». Кстати, Г.Ф.Вороной тоже участвовал в работе конгресса в Гейдельберге, много общался с Минковским. Результатом общения двух создателей нового направления в математике – геометрии чисел – стала грандиозная программа, которую наметил себе на последующие годы Вороной. И хотя, к огромному сожалению, судьба отпустила ему только четыре года, Георгий Феодосьевич успел написать несколько фундаментальных работ по геометрии положительных квадратичных форм и теории параллелоэдров, в которых были решены принципиальные задачи из теории покрытий, упаковок и разбиений. Эти работы определили направление исследований на столетие вперед.

#### Киевский университет, семинар Граве

Хотя впоследствии работы Вороного оказали серьезное влияние на исследования Делоне, прямых научных контактов у Бориса-гимназиста с маститым ученым не было. Вороной умер неожиданно в возрасте 40 лет в том самом 1908 году, когда Борис Делоне поступил на физико-математический факультет Киевского университета.

На этот факультет примерно в одно время поступили учиться несколько исключительно талантливых и амбициозных молодых людей, среди них Отто Шмидт и Николай Чеботарев. Николай Григорьевич Чеботарев (1894–1947) стал выдающимся алгебраистом мирового уровня, член-корреспондентом АН СССР. Академик Отто Юльевич Шмидт (1891–1956) – многогранно талантливый человек невероятной энергии. В истории российской математики Шмидт известен не только как крупный алгебраист, автор хорошо известной книги «Абстрактная теория групп», но и как основатель знаменитой московской алгебраической школы. В 1934 году имя Героя Советского Союза Шмидта стало легендарным: он был начальником знаменитой полярной экспедиции на ледоколе «Челюскин», а после гибели ледокола организовал зимовку на льдине и в

<sup>2</sup> В то время Польша была частью Российской Империи.

течение нескольких месяцев полярной ночи, вплоть до благополучной эвакуации экспедиции, как руководитель сделал все, чтобы все люди остались живы.

Борис Делоне, Отто Шмидт, Николай Чеботарев, Александр Островский, Абрам Безикович составили ядро семинара, возглавляемого известным математиком профессором Дмитрием Граве. Этот семинар, существовавший в Киевском университете на рубеже 1910-х годов и вошедший в историю отечественной математики как воспитавший плеяду математиков экстракласса, предопределил направление исследований Делоне на многие годы. Студенческая работа Бориса Делоне «Связь между теорией идеалов и теорией Гауэ» была удостоена Большой золотой медали университета, и Борис был оставлен «для подготовки к профессорскому званию», или, говоря по-нынешнему, в аспирантуру. Первая опубликованная работа Делоне «Об определении алгебраической области посредством конгруэнтности» была посвящена новому доказательству знаменитой теоремы Кронекера об абсолюто абелевых полях.

### Диофантовы уравнения третьей степени

В это же время Б.Н.Делоне начал исследования по теории диофантовых уравнений третьей степени с двумя неизвестными. Цикл работ по теории кубических диофантовых уравнений оказался, по собственному признанию Бориса Николаевича, лучшим достижением во всей его математической карьере.

Диофантово уравнение – это уравнение вида

$$p(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (1)$$

где  $p(x_1, \dots, x_n)$  – многочлен с целыми коэффициентами, для которого нужно найти *целые*, иногда рациональные, решения.

Так, известное уравнение  $x^2 + y^2 = z^2$ , в котором нужно найти все целые решения, есть пример уравнения 2-й степени с тремя неизвестными. Оно имеет бесконечно много целых решений, хорошо известных под названием *пифагоровы тройки*, потому что они соответствуют прямоугольным треугольникам с целыми сторонами: (3,4,5), (5,12,13) и т.д.<sup>3</sup>

В одной из 23 знаменитых проблем, а именно в 10-й проблеме, Гильберт поставил вопрос: существует ли алгоритм, позволяющий определить по коэффициентам уравнения (1), существует или нет решение этого уравнения? Сейчас, после работы Ю.В.Матиясевича, решившего 10-ю проблему Гильберта (1970), точно известно, что такого алгоритма не существует. Надо сказать, что специалисты по диофантовым уравнениям, которые прекрасно знали, с каким трудом давался каждый шаг в этой области, всегда сомневались в существовании такого алгоритма.

Простейший вид диофантова уравнения – это линейное уравнение с двумя неизвестными:

$$ax + by = 1,$$

где  $a$  и  $b$  – целые. Впервые это уравнение было

<sup>3</sup> Подробнее см., например, «Квант» №1 за 1986 год, с.11.

исследовано индийским математиком Ариабхатой еще в V–VI веках.

Диофантовы уравнения 2-й степени оказались гораздо труднее. Они были полностью изучены великими математиками Леонардом Эйлером (полная теория квадратных уравнений Пелля  $ax^2 + y^2 = 1$ , где  $a$  не равен квадрату целого числа), а также Ж.Лагранжем, К.Гауссом.

Что касается диофантовых уравнений степени 3 и выше, глубокий и неожиданный результат был получен норвежским математиком Акселем Туэ в 1908 году. Туэ доказал, что диофантово уравнение вида

$$f(x, y) = c,$$

где  $f(x, y)$  – однородный многочлен степени 3 или выше, может иметь лишь конечное число целых решений. Здесь предполагается, что многочлен  $f(x, y)$  не раскладывается в произведение многочленов степени 2 и ниже. В этом случае решение уравнения высокой степени можно свести к решению квадратного диофантова уравнения. А квадратные уравнения, например квадратное уравнение Пелля, имеют бесконечное число решений. Напомним, что многочлен называется *однородным* (или *формой*), если все входящие в него одночлены имеют одну и ту же степень.

Однако нужно заметить, что теорема Туэ не давала никаких средств для нахождения решений. Из нее нельзя было получить никакой верхней оценки для значений решений, что давало бы возможность найти целые решения хотя бы путем грубого перебора.

Журнала с работой Туэ в Киеве в то время никто не видел. Борис Николаевич решил исследовать давно стоявшую проблему решения неопределенных кубических уравнений. Как оказалось в дальнейшем, работы Делоне обозначили едва ли не первый после Эйлера и Лагранжа серьезный прогресс в направлении конкретного исследования диофантовых уравнений более высокого порядка, а именно, уравнений вида

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 1, \quad (2)$$

где слева – форма 3-й степени с целыми коэффициентами и с отрицательным дискриминантом. «Отрицательность дискриминанта» означает, что кубическое уравнение  $at^3 + bt^2 + ct + d = 0$  имеет единственный вещественный корень. Сначала Б.Н.Делоне приступил к важному частному случаю кубических уравнений с отрицательным дискриминантом – кубическому аналогу уравнения Пелля:

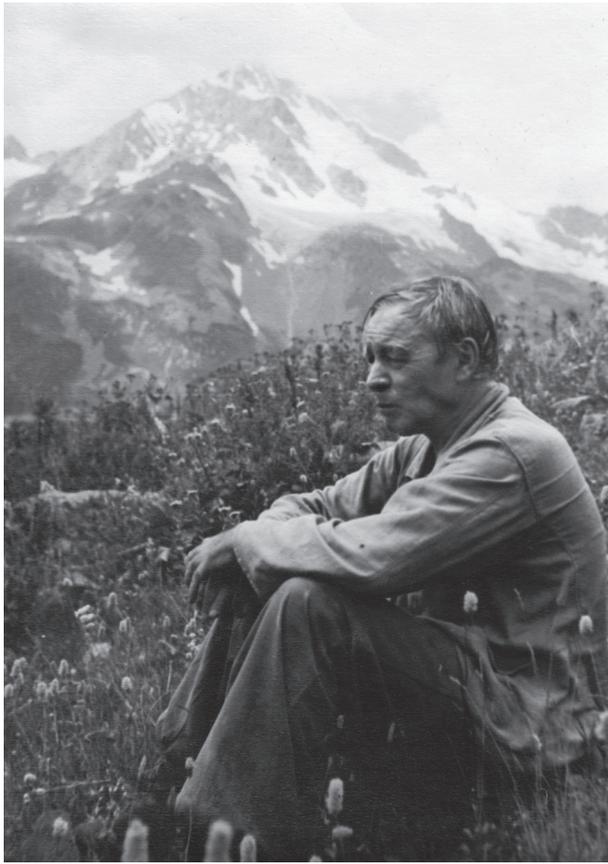
$$x^3q + y^3 = 1, \quad (3)$$

где  $q$  – целое, но не куб целого. (Если  $q$  является кубом целого, то форма была бы разложимой:

$$x^3q + y^3 = (x\sqrt[3]{q} + y)(x^2\sqrt[3]{q^2} - x\sqrt[3]{q}y + y^2),$$

и проблема свелась бы к решению диофантовых уравнений степеней 1 и 2.)

Уравнение (3) в целых числах всегда имеет тривиальное решение (0; 1). Задача – найти остальные решения, если такие, конечно, имеются. Делоне ввел в



Кавказ, Домбай (1948 год)

рассмотрение кольцо  $\sigma$  алгебраических чисел

$$z\sqrt[3]{q^2} + x\sqrt[3]{q} + y. \quad (4)$$

По существу – это множество чисел вида (4), где числа  $z$ ,  $x$ ,  $y$  целые. Легко проверить, что как сумму и разность, так и произведение двух чисел вида (4) можно представить в таком же виде. Другими словами, множество чисел вида (4) замкнуто относительно арифметических операций сложения и вычитания, а также и умножения. В алгебре такие множества называют *кольцом*. В числовом кольце наряду с каждым числом существует ему противоположное, но, вообще говоря, нет ему обратного. Нетрудно убедиться, что если пара целых чисел  $(x, y)$  есть решение уравнения (3), то вместе с числом  $\varepsilon = x\sqrt[3]{q^2} + y$  кольцу  $\sigma$  принадлежит и обратное ему число  $\varepsilon^{-1}$ . Другими словами, число  $\varepsilon^{-1}$  также можно представить в виде (4). Числа из кольца  $\sigma$ , для которых обратные также принадлежат кольцу, называют *единицами*. Например, при  $q = 2$  число  $\sqrt[3]{2} - 1$  является единицей, так как обратное ему число представимо в виде  $\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1$  и, следовательно, принадлежит  $\sigma$ .

Итак, любое решение уравнения (3) соответствует единице из  $\sigma$ , более того, эта единица должна быть *двучленной* в том смысле, что один из трех членов в числе вида (4), а именно  $z\sqrt[3]{q^2}$ , равен 0. Из одной теоремы Дирихле следует, что в  $\sigma$  существует так

называемая основная единица  $\varepsilon_0$ , а все остальные единицы есть степени основной. Более того, было известно, что если двучленная единица  $\varepsilon \in \sigma$  такая, что  $0 < \varepsilon < 1$ , то степень  $m$  в равенстве  $\varepsilon = \varepsilon_0^m$  положительна.

В дальнейшем Делоне доказал, что если основная единица  $\varepsilon_0$  двучленная, то никакая положительная степень  $m$  единицы  $\varepsilon_0$ , за исключением  $m = 1$ , не равна двучленной единице. Затем был исследован случай  $\varepsilon = \varepsilon_0^m$ , когда  $\varepsilon_0$  – трехчленная основная единица. При помощи остроумнейших соображений Борис Николаевич доказал, что единица вида  $\varepsilon_0^m$  может быть двучленной лишь тогда, когда сама основная единица  $\varepsilon_0$  двучленна.

Тем самым, Б.Н.Делоне получил окончательный результат: кубический аналог уравнений Пелля (3), помимо тривиального решения  $(0; 1)$ , имеет еще не более одного нетривиального решения. Для того чтобы получить это решение, нужно найти основную единицу. Если эта единица двучленна:  $x\sqrt[3]{q} + y$ , то  $(x, y)$  есть единственное нетривиальное решение уравнения (3). Если это не так, то нетривиальных решений нет вовсе.

Здесь нужно сказать, что приблизительно двадцатью годами ранее Вороной построил алгоритм вычисления основной единицы в кольце  $\sigma$ . Например, для уравнения  $4x^3 + y^3 = 1$  кольцо имеет трехчленную основную единицу, и данное уравнение имеет лишь тривиальное решение  $(0; 1)$ . А для уравнения  $37x^3 + y^3 = 1$  основная единица двучленна:  $\varepsilon_0 = -3\sqrt[3]{37} + 10$ . Поэтому кроме тривиального решения имеется в точности еще одно:  $(-3; 10)$ .

После столь крупного успеха Б.Н.Делоне приступил к общему уравнению (2), напомним, с отрицательным дискриминантом. И в общем случае он свел проблему к исследованию двучленных единиц вида  $x + y\rho$  в кольце  $\sigma$  алгебраических чисел  $x + y\rho + z\rho^2$ , где  $\rho$  – единственный вещественный корень уравнения  $at^3 + bt^2 + ct + d = 0$ . Посредством созданного им «алгоритма повышения» Борис Николаевич доказал следующую фундаментальную теорему:

*В общем случае уравнение (2) имеет не более 3 целых решений; в двух конкретных случаях уравнение имеет в точности 4 решения; одно конкретное уравнение имеет ровно 5 решений. Никакое уравнение вида (2) не имеет более 5 целых решений.*

Так, уравнение  $x^3 - xy^2 + y^3 = 1$  имеет пять решений:  $(1; 1)$ ,  $(1; 0)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(-1; 1)$ ,  $(4; -3)$ . А тот факт, что других нет, следует из упомянутой теоремы Делоне.

Правда, у «алгоритма повышения» был серьезный недостаток, который Делоне не смог устранить. Трудность состояла в том, что тогда не было известно верхней оценки для значений решений данного уравнения, выраженной через коэффициенты уравнения. Метод, предложенный Борисом Николаевичем, не содержал указания относительно момента, наступление которого гарантировало бы нахождение всех решений данного уравнения.

Несмотря на то, что в каждом рассмотренном уравнении этот «алгоритм» срабатывал, уверенность в том, что получены все решения, возникала лишь тогда, когда у уравнения уже найдены 3 решения. Верхняя же оценка для решений уравнения через коэффициенты формы при условии, что степень не меньше 3, была получена лишь в 1960-е годы А.Бейкером. За свою работу Бейкер был удостоен Филдсовской медали.

После классических результатов Эйлера, Лагранжа, Гаусса по диофантовым уравнениям второй степени работы Делоне представляли серьезный прорыв в теории кубических уравнений и оставались непревзойденными вплоть до 1960 годов (А.Бейкер). Как писал член-корреспондент АН СССР Д.К.Фаддеев, «по конкретности анализа, простоте и ясности цикл работ Б.Н.Делоне, посвященных неопределенным уравнениям, является исключительным в математике XX века с ее часто громоздким аппаратом и абстрактными построениями. По своему стилю этот цикл близок к лучшим образцам классических работ Гаусса и Чебышева».

### Жизнь в Киеве, переезд в Санкт-Петербург (Ленинград)

Успех явился результатом, как говорил Делоне, нескольких тысяч часов интенсивной работы. Борис Николаевич любил добавлять, что решение трудной математической проблемы отличается от решения олимпиадной задачи тем, что «олимпиадная задача требует 5 часов, а проблема – 5 тысяч часов». Следует отметить, что ему удалось добиться крупного успеха в теории диофантовых уравнений, несмотря на чрезвычайно тяжелые политические и жизненные условия, существовавшие в Киеве в то время.

В годы первой мировой войны Киев был оккупирован немецкими войсками, и вместе со многими другими университетскими профессорами семья Делоне в 1915–1916 годах выезжала в Саратов. Туда же приехал из Киева и Николай Чеботарев, который был на четыре года младше. Именно в Саратове его общение с Б.Н.Делоне оказалось для Чеботарева определяющим.

Когда Делоне вернулись в Киев, наступила революция и кровопролитная гражданская война. Киев оказался в центре этих жестоких событий. Одна власть сменяла другую непрерывно. Немецкие войска были выбиты из Киева Красной Армией. Красные, в свою очередь, уступали город белым, белые вытеснялись опять красными, красные – жовтоблакитными, те – зелеными, белополяками и т.д. Политическая карусель в Киеве, сопровождавшаяся террором, продолжалась несколько лет. Делоне часто рассказывал не без юмора об одном эпизоде из его жизни в те годы. Его младший брат Александр – в семье его называли Алик – был офицером в деникинской армии. Однажды, когда белые скоропалительно сдали город красным, Алик, переодевшись в гражданское платье, вынужден был бежать из Киева. Форма белого офицера осталась в доме отца, где жил также и Борис. Ночью

в квартиру пришел для проверки краснофлотский патруль. Во время обыска командир патруля подошел к двухстворчатому гардеробу, где за левой дверью висел мундир Алика, и резко отворил... правую. Неожиданно с верхней полки упала на пол огромная кукла и начала плакать. Привезенная из Парижа плачущая кукла, а в то время это казалось настоящим чудом, настолько поразила матросов, что они забыли открыть другую дверь шкафа... А ведь время было жестоким и беспощадным, расстрел, что называется, на месте был делом обычным.

В тот период Борис Николаевич работал учителем математики в гимназии и доцентом в Киевском политехническом институте. В 1920 году он написал большую работу по кубическим диофантовым уравнениям и прекрасно оформленную рукопись отослал в качестве докторской диссертации в Санкт-Петербургский, тогда Петроградский университет. Комиссия под руководством А.А.Маркова<sup>4</sup> высоко оценила диссертацию, и в 1922 году Б.Н.Делоне был приглашен в Петроградский университет в качестве профессора. Это было действительно очень почетно, так как университет был «домом» знаменитой Санкт-Петербургской школы теории чисел, семена которой были посеяны еще Эйлером и которая расцвела во второй половине XIX века под руководством П.Л.Чебышева. Во времена Чебышева ядро этой школы составляли А.А.Марков, А.Н.Коркин, Е.И.Золотарев, А.А.Ляпунов.

В то время, в соответствии с традициями знаменитой теоретико-числовой школы, ее выдающийся представитель Георгий Вороной «одел» свою исключительно геометрическую по идее работу о параллелоэдрах в «аналитические одежды». В противоположность этой традиции, Делоне, обладая несомненным геометрическим даром, в течение многих лет занимался геометризацией нескольких важных алгебраических работ, включая алгоритм Вороного для вычисления основной единицы в кольце, соответствующей кубической форме отрицательного дискриминанта. В этой и других работах он интерпретировал кольцо кубических иррациональностей как целочисленную решетку с естественным правилом умножения.

Здесь мы завершаем обзор исследований алгебраических вопросов геометрическими методами, чтобы рассказать об одной простой, но важной теории, которую Борис Николаевич начал еще в начале 1920-х годов, – о так называемом методе пустого шара и связанном с ним разбиении пространства на специальные многогранники. Где-то в 1980-е годы, уже после смерти Б.Н.Делоне, эти разбиения получили название «триангуляции Делоне».

*(Окончание следует)*

<sup>4</sup> Академик Андрей Андреевич Марков (1856–1922) – выдающийся русский математик, внес крупный вклад в теорию чисел и особенно в теорию вероятностей («марковские цепи и процессы»).

# Что такое ЯМР-томография?

А.ВАРЛАМОВ, А.РИГАМОНТИ

СЕГОДНЯ УЖЕ СТАЛО ПРИВЫЧНЫМ НАПРАВЛЯТЬ пациента не на рентгенографию, не на электрокардиограмму, а на ЯМР-томографию. Для того чтобы разобраться, что стоит за этими словами, следует начать издали, а именно с понимания того, что такое магнетизм атомного ядра. Но еще до этого нам надо ввести важные понятия, которые отсутствуют в основном курсе школьной физики.

## Магнитный момент

Магнитные свойства маленького плоского контура с током, помещенного в магнитное поле, определяются магнитным моментом этого тока, равным

$$\vec{\mu} = IS\vec{n},$$

где  $I$  – ток,  $S$  – площадь контура,  $\vec{n}$  – вектор нормали к контуру, построенный по правилу буравчика (рис.1).

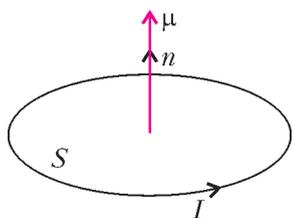


Рис.1. Магнитный момент контура с током

В частности, энергия контура в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  равна

$$W = -(\vec{\mu}\vec{B}) = -\mu_z B$$

(ось  $z$  направлена вдоль  $\vec{B}$ ). Для поворота контура с изменением проекции вектора  $\vec{\mu}$  от  $\mu_z$  до  $-\mu_z$  надо совершить работу  $A = 2\mu_z B$ .

Атомный электрон, движущийся по орбите вокруг атомного ядра, можно считать эквивалентным круговому току и приписать ему магнитный момент. Наличие такого «орбитального» магнитного момента у электрона проявляется в изменении его энергии при помещении атома в магнитное поле (формула для  $W$ ).

При тщательном анализе экспериментальных данных оказалось, что свойства атома во внешнем магнитном поле определяются не только движением электрона вокруг ядра, но и наличием у электрона скрытого «внутреннего вращения», которое назвали спином. Спин есть у всех элементарных частиц (у некоторых спин равен нулю). Интенсивность «вращения» описывается спиновым числом  $s$ , которое может быть только целым или полуцелым. Для электрона, протона, нейтрона  $s = \frac{1}{2}$ . «Внутреннее вращение», аналогично орбитальному, приводит к появлению у частицы спинового магнитного момента. Проекция спинового магнитного момента на ось  $z$  (направление магнитного поля) принимает значения

$$\mu_z = \gamma m_s \hbar,$$

где  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  – постоянная Планка,  $m_s$  принимает  $(2s + 1)$  значений  $-s, -s + 1, \dots, s - 1, s$ , а  $\gamma$  называют гиромагнитным фактором. Сам вектор  $\vec{\mu}$  имеет модуль больше, чем его максимальная проекция:  $\mu = \gamma \sqrt{s(s+1)} \hbar$ , т.е.  $\vec{\mu}$  во всех стационарных состояниях расположен под углом к оси  $z$  и быстро вращается вокруг этой оси:  $\mu_z = \text{const}$ ,  $\mu_x$  и  $\mu_y$  быстро меняются (рис.2). Для электрона, протона, нейтрона  $m_s$  принимает всего два значения:  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ . Для электрона  $\gamma = -\frac{e}{m_e}$ , для протона  $\gamma = 2,79 \frac{e}{m_p}$ . Спиновый магнитный момент есть даже у нейтрона, несмотря на то что он в целом электронейтрален. (Это свидетельствует о том, что нейтрон должен иметь внутреннюю структуру. Как и протон, он состоит из заряженных кварков.) Для нейтрона  $\gamma = -1,91 \frac{e}{m_p}$ .

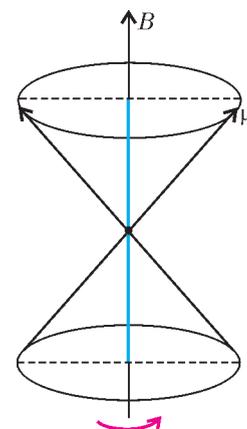


Рис.2. Только одна проекция вектора магнитного момента постоянна, две другие быстро меняются

Видно, что магнитный момент протона и нейтрона на три порядка ( $\sim 10^3$ ) меньше, чем магнитный момент электрона (их масса примерно в 2000 раз больше). Примерно такой же по порядку величины магнитный момент должен быть у всех остальных атомных ядер, состоящих из протонов и нейтронов. Магнитные моменты всех ядер измерены с большой точностью. Именно наличие у ядер этих маленьких (в сравнении с атомными) магнитных моментов, значения которых различны для разных ядер, и лежит в основе явления ЯМР – ядерного магнитного резонанса, а также ЯМР-томографии. Мы в основном будем говорить о ядрах водорода – протонах, которые имеют наиболее широкое распространение в природе. Изотопом водорода является дейтерий, чье ядро также обладает магнитным моментом.

## Что такое ядерный магнитный резонанс

Рассмотрим ядро атома водорода (протон) во внешнем магнитном поле  $\vec{B}$ . Протон может находиться только в двух стационарных квантовых состояниях: в одном из них проекция магнитного момента на направление магнитного поля положительна и равна

$$\mu_z = \frac{2,79e\hbar}{2m_p},$$

а в другом – такая же по модулю, но отрицательная. В первом состоянии энергия ядра в магнитном поле равна  $-\mu_z B$ , во втором  $+\mu_z B$ . Изначально все ядра находятся в первом состоянии, а для перехода во второе состояние ядру надо сообщить энергию

$$\Delta E = 2\mu_z B.$$

Нетрудно понять, что заставить ядро изменить направление своего магнитного момента можно, подействовав на него электромагнитным излучением с частотой  $\omega$ , соответствующей переходу между этими состояниями:

$$\hbar\omega = 2\mu_z B.$$

Подставляя сюда магнитный момент протона, получим

$$2\pi\hbar\nu = 2 \frac{2,79e\hbar}{2m_p} B,$$

откуда для  $B = 1$  Тл находим частоту волны:  $\nu \approx 4 \cdot 10^7$  Гц и соответствующую длину волны:  $\lambda = \frac{c}{\nu} \approx 7$  м – типичные частота и длина волны радиовещательного диапазона. Фотоны именно этой длины волны поглощаются ядрами с переворотом магнитных моментов по отношению к направлению поля. При этом их энергия в поле повышается как раз на величину, соответствующую энергии такого кванта.

Отметим, что в экспериментах по ЯМР, т.е. для типичных частот среднего радио-вещательного диапазона, электромагнитные волны используются вовсе не в том виде, к которому мы привыкли при обсуждении распространения света или поглощения и излучения света атомами. В простейшем случае мы имеем дело с катушкой, по которой протекает созданный генератором переменный ток радиочастоты. Образец, содержащий исследуемые ядра, которые мы хотим подвергнуть воздействию электромагнитного поля, помещается на оси катушки. Ось катушки, в свою очередь, направлена перпендикулярно статическому магнитному полю  $B_0$  (последнее создается с помощью электромагнита или сверхпроводящего соленоида). При протекании по катушке переменного тока на ее оси индуцируется переменное магнитное поле  $B_1$ , амплитуда которого выбирается гораздо меньшей величины  $B_0$  (обычно в 10000 раз). Это поле осциллирует с той же частотой, что и ток, т.е. с радиочастотой генератора.

Если частота генератора близка к вычисленной частоте, то происходит интенсивное поглощение ядрами водорода квантов света с переходом ядер в состояние с отрицательной проекцией  $\mu_z$  (поворот ядер). Если же частота генератора отличается от вычисленной, то поглощения квантов не происходит. Именно в связи с резкой (резонансной) зависимостью от частоты передачи энергии от этого поля ядрам атомов, сопровождаемое поворотом их магнитных моментов, явление получило название ядерного магнитного резонанса (ЯМР).

Как же можно заметить такие перевороты ядерных моментов по отношению к статическому магнитному полю? Будучи вооруженными современной техникой

ЯМР, это оказывается совсем нетрудно: выключив создающий поле  $B_1$  генератор радиочастоты, следует одновременно включить приемник, использующий ту же катушку в качестве антенны. При этом он будет регистрировать радиоволны, излучаемые ядрами по мере их возвращения к первоначальной ориентации вдоль поля  $B_0$ . Этот сигнал индуцируется в той же катушке, посредством которой ранее возбуждались магнитные моменты. Его временная зависимость обрабатывается компьютером и представляется в виде соответствующего спектрального распределения.

Из этого описания вы можете представить, что ЯМР-спектрометр весьма существенно отличается от привычных спектрометров, проводящих измерения в диапазоне видимого света.

До сих пор мы рассматривали упрощенную картину: поведение в магнитном поле изолированного ядра. В то же время понятно, что в твердых телах или жидкостях ядра совсем изолированными не являются. Они могут взаимодействовать между собой, а также и со всеми другими возбуждениями, распределение по энергиям которых определяется температурой и статистическими свойствами системы. Взаимодействия возбуждений различной природы, их происхождение и динамика являются предметом изучения современной физики конденсированного состояния.

### Как был открыт ЯМР

Первые сигналы, соответствующие ядерному магнитному резонансу, были получены более шестидесяти лет назад группами Феликса Блоха в Оксфорде и Эдварда Парселла в Гарварде. В те времена экспериментальные трудности были огромны. Все оборудование изготавливалось самими учеными прямо в лабораториях. Вид аппаратов того времени несопоставим с сегодняшними (использующими мощные сверхпроводящие соленоиды) приборами ЯМР, которые можно увидеть в больницах или поликлиниках. Достаточно сказать, что магнит в экспериментах Парселла был создан с использованием утиля, найденного на задворках Бостонской трамвайной компании. При этом он был калиброван настолько плохо, что магнитное поле в действительности имело величину большую, чем требовалось для переворота ядерных моментов при облучении радиоволнами с частотой  $\nu = 30$  МГц (частота радиогенератора).

Парселл со своими молодыми сотрудниками титанно искали подтверждения того, что явление ядерного магнитного резонанса имело место в его экспериментах. После многих дней бесплодных попыток разочарованный и грустный Парселл решает, что ожидаемое им явление ЯМР не наблюдается, и дает указание выключить питающий электромагнит ток. Пока магнитное поле уменьшалось, разочарованные экспериментаторы продолжали глядеть на экран осциллографа, где все это время надеялись увидеть желанные сигналы. В некоторый момент магнитное поле достигло необходимой для резонанса величины, и на экране неожиданно появился соответствующий ЯМР сигнал. Если бы не счастливый случай, возможно прошли бы еще многие

годы, прежде чем существование этого замечательного явления было бы подтверждено экспериментально.

С этого момента техника ЯМР стала бурно развиваться. Она получила широкое применение в научных исследованиях в областях физики конденсированного состояния, химии, биологии, метрологии и медицины. Наиболее известным применением стало получение с помощью ЯМР изображения внутренних органов.

### Как осуществляется визуализация внутренних органов посредством ЯМР

До сих пор мы неявно предполагали, что, в пренебрежении влиянием слабых электронных токов в катушках, магнитное поле, в которое помещаются ядра, однородно, т.е. имеет одну и ту же величину во всех точках. В 1973 году Пол Латербур предложил проводить ЯМР-исследования, помещая образец в магнитное поле, меняющееся от точки к точке. Понятно, что в этом случае и резонансная частота для исследуемых ядер изменяется от точки к точке, что позволяет судить об их пространственном расположении. А поскольку интенсивность сигнала от определенной области пространства пропорциональна числу атомов водорода в этой области, мы получаем информацию о распределении плотности вещества по пространству. Собственно, в этом и заключается принцип техники ЯМР-исследования. Как видите, принцип прост, хотя для получения реальных изображений внутренних органов на практике следовало получить в распоряжение мощные компьютеры для управления радиочастотными импульсами и еще долго совершенствовать методологию создания необходимых профилей магнитного поля и обработки сигналов ЯМР, получаемых с катушек.

Представим себе, что вдоль оси  $x$  расположены маленькие заполненные водой сферы (рис.3). Если магнитное поле не зависит от  $x$ , то возникает одиночный сигнал (см. рис.3,а). Далее предположим, что посредством дополнительных катушек (по отношению к той, которая создает основное, направленное по оси  $z$ , магнитное поле) мы создаем дополнительное, меняющееся вдоль оси  $x$ , магнитное поле  $B_0$ , причем его величина возрастает слева направо. При этом понятно, что для сфер с различными координатами сигнал ЯМР теперь будет соответствовать различным частотам и измеряемый спектр будет содержать в себе пять характерных пиков (см. рис.3,б). Высота этих пиков будет пропорциональна количеству сфер (т.е. массе воды), имеющих соответствующую координату, и, таким образом, в рассматриваемом случае интенсивности пиков будут относиться как 3:1:3:1:1. Зная величину градиента магнитного поля (т.е. скорость его изменения вдоль оси  $x$ ), можно представить измеряемый частотный спектр в виде зависимости плотности атомов водорода от координаты  $x$ . При этом можно будет сказать, что там где пики выше, число атомов водорода больше: в нашем примере числа атомов водорода, соответствующих положениям сфер, действительно соотносятся как 3:1:3:1:1.

Расположим теперь в постоянном магнитном поле  $B_0$  некоторую более сложную конфигурацию маленьких

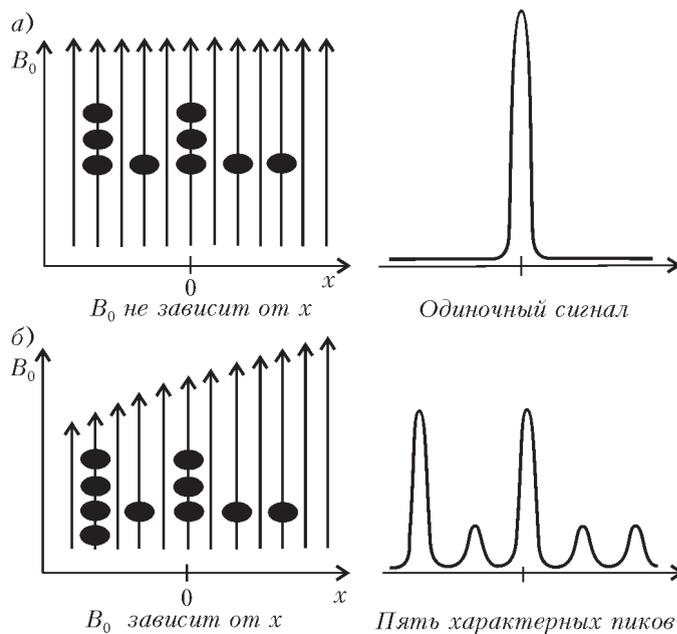


Рис.3. В случае однородного магнитного поля имеется единственный ЯМР-сигнал (а). В случае же меняющегося в пространстве поля сигналы, соответствующие ядрам, расположенным в разных точках, имеют несколько отличающиеся частоты, и спектр позволяет определить их координаты (б)

заполненных водой сфер и наложим дополнительное магнитное поле, изменяющееся вдоль всех трех осей координат. Измеряя радиочастотные спектры ЯМР и зная величины градиентов магнитного поля вдоль координат, можно создать трехмерную карту распределения сфер (а следовательно, и плотности водорода) в исследуемой конфигурации. Сделать это гораздо сложнее, чем в рассмотренном выше одномерном случае, однако интуитивно понятно, в чем этот процесс заключается.

Техника восстановления образов, сходная с той, которую мы описали, и осуществляется при ЯМР-томографии. Закончив накопление данных, компьютер посредством весьма быстрых алгоритмов начинает «обработку» сигналов и устанавливает связь между интенсивностью измеренных сигналов при определенной частоте и плотностью резонирующих атомов в данной точке тела. В конце этой процедуры компьютер визуализирует на своем экране двумерное (или даже трехмерное) «изображение» определенного органа или части тела пациента.

### Поразительные «образы»

Чтобы полностью оценить результаты ЯМР-исследования внутренних органов человека (например, различных сечений головного мозга, которые физик-медик сегодня может получить не дотрагиваясь до черепа!), следует прежде всего понимать, что речь идет о компьютерном воссоздании именно «образов», а не о реальных тенях, возникающих на фоточувствительной пленке при поглощении рентгеновских лучей в процессе получения рентгеновского снимка.

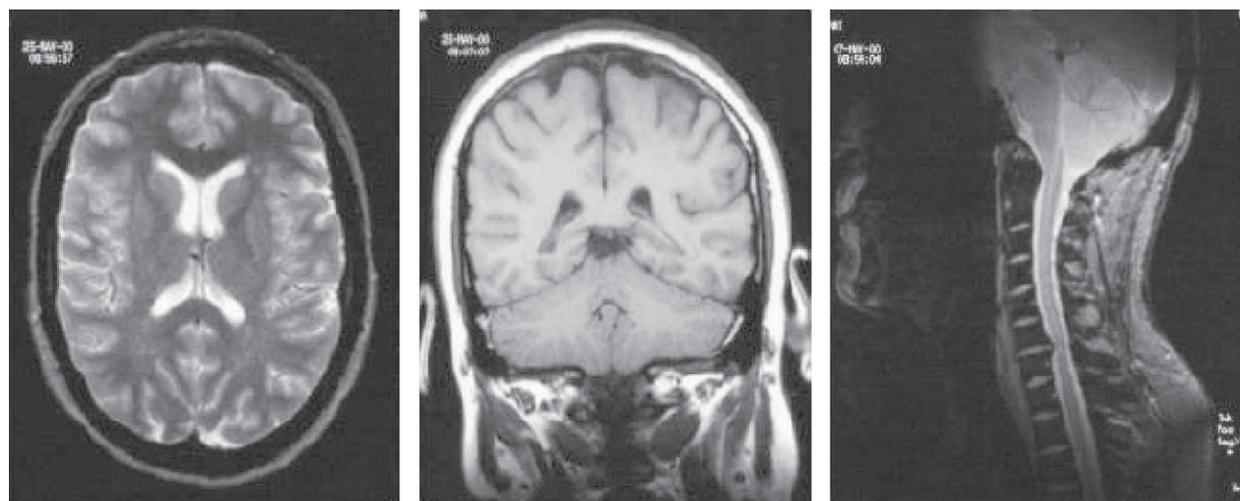


Рис.4. Изображения черепа и позвоночного столба, которые с прекрасной анатомической точностью в зависимости от контраста показывают белую или серую ткань мозга, позвоночник и спино-мозговую жидкость

Человеческий глаз является чувствительным датчиком электромагнитного излучения в видимом диапазоне. К счастью или несчастью, излучения, происходящие от внутренних органов, до наших глаз не доходят – мы видим человеческие тела только извне. В то же время, как мы только что обсуждали, в определенных условиях ядра атомов внутренних органов человеческого тела могут излучать электромагнитные волны в диапазоне радиочастот (т.е. частот, гораздо меньших, чем для видимого света), причем частота слегка меняется в зависимости от точки излучения. Глазом его не увидеть, поэтому такое излучение регистрируется с помощью сложной аппаратуры, а затем собирается в единое изображение с помощью специальной компьютерной обработки. И тем не менее, речь идет о совершенно реальном видении внутренней части предмета или человеческого тела.

К такому поразительному успеху человечество пришло благодаря ряду фундаментальных достижений научной мысли: это и квантовая механика с ее теорией магнитного момента, и теория взаимодействия излучения с веществом, и цифровая электроника, и математические алгоритмы преобразования сигналов, и компьютерная техника.

Преимущества ЯМР-томографии по сравнению с другими диагностическими методами многочисленны и значительны. Оператор может легко выбирать, какие сечения тела пациента просканировать, а также может подвергать исследованию одновременно несколько сечений выбранного органа. В частности, выбирая соответствующим образом градиенты магнитного поля, можно получить вертикальные сечения изображения внутренних частей нашего черепа. Это может быть центральное сечение или сечения, смещенные вправо или влево. (Такие исследования практически невозможны в рамках рентгеновской радиологии.) Оператор может «сужать» поле наблюдения, визуализируя сигналы ЯМР, происходящие только от одного выбранного органа или только от одной из его частей, увеличивая таким образом разрешение изображения. Важным преимуществом ЯМР-томографии является также и воз-

можность прямого измерения локальной вязкости и направления течения крови, лимфы и других жидкостей внутри человеческого тела. Подбирая необходимые соотношения между соответствующими параметрами, например длительностью и частотой импульсов, для каждой патологии оператор может достигать оптимальных характеристик получаемого изображения, скажем повышать его контрастность (рис.4).

Суммируя, можно сказать, что для каждой точки изображения (пикселя), соответствующей крошечному объему исследуемого объекта, оказывается возможным извлечь различную полезную информацию, в некоторых случаях включая и распределение концентрации тех или иных химических элементов в организме. Для повышения чувствительности измерений, т.е. увеличения отношения интенсивности сигнала к шуму, следует накапливать и суммировать большое число сигналов. В этом случае удается получить качественное изображение, адекватно передающее реальность. Именно поэтому времена проведения ЯМР-томографии оказываются довольно большими – пациент должен относительно неподвижно пребывать в камере несколько десятков минут.

В 1977 году английский физик Питер Мэнсфилд придумал такую комбинацию градиентов магнитного поля, которая, не давая особенно хорошего качества изображения, тем не менее позволяет получать его чрезвычайно быстро: для соответствующего построения хватает единственного сигнала (на практике это занимает приблизительно 50 миллисекунд). С помощью такой техники – ее называют планарным эхом – сегодня можно следить за пульсациями сердца в реальном времени: в таком фильме на экране чередуются его сокращения и расширения.

Можно ли было представить себе на заре создания квантовой механики, что через сто лет развитие науки приведет к возможности таких чудес?

Нельзя не отметить, что в 2003 году Пол Лотербург и Питер Мэнсфилд были удостоены Нобелевской премии в области медицины «за изобретение метода магнитно-резонансной томографии».



# Как управлять светом с помощью магнитного поля

В. БЕЛОТЕЛОВ

**В** ПОСЛЕДНЕЕ ВРЕМЯ ИДЕЯ СОЗДАНИЯ ОПТИЧЕСКИХ компьютеров приобретает все большую популярность. Она подкрепляется, с одной стороны, неиссякающим стремлением к все большему скоростям вычислений, а с другой стороны – удивительными возможностями современных технологий. Для того чтобы обрабатывать и передавать информацию с помощью света, т.е. с помощью фотонов, надо научиться эффективно управлять ими. Хотя электрического заряда у фотонов нет, но наличие поляризации – ориентации их электромагнитного поля – дает определенную надежду на успех.

Прежде всего перенесемся в конец XIX века, в лабораторию великого английского физика Майкла Фарадея – ведь именно оттуда берет исток наша история.

## «Намагнитить луч света и осветить магнитную силовую линию»

Разнообразные физические явления, связанные с магнитными и оптическими свойствами среды, в течение многих столетий изучались независимо. Свет сопровождает человечество с момента его зарождения, а магнетизм известен с древних времен. Однако только в 1845 году М.Фарадей впервые провел эксперименты, доказавшие связь между этими явлениями. Отчасти это связано с тем, что в обычных условиях магнитооптические эффекты весьма малы и для их открытия требовалась физическая интуиция гения. Удивительно, что это произошло в то время, когда не было ясного понимания ни природы магнитных свойств, ни природы оптических явлений и когда еще не были сформулированы уравнения Максвелла.

*«Я уже давно придерживался мнения, что различные формы и силы материи настолько близки и родственны, что могут превращаться друг в друга. Это твердое убеждение побудило меня произвести много изысканий с целью открыть связь между светом и электричеством. Однако результаты оказались отрицательными...»* – так сам Фарадей комментирует свои опыты.

*«Эти безуспешные изыскания не могли поколебать моего твердого убеждения, основанного на научных соображениях. Поэтому я недавно возобновил исследование на очень тонких и строгих началах, и в конце концов мне удалось намагнитить и наэлектризовать луч света и осветить магнитную силовую линию.»*

В словах «*намагнитить луч света*» подразумевается вызываемое магнитным полем вращение плоскости поляризации света – магнитооптический эффект Фарадея. Кроме того, обращают на себя внимание и слова «*осветить магнитную силовую линию*», намекающие на возможное обратное влияние света на магнетизм. В опытах Фарадея такого явления обнаружено не было, но эти слова указывают на то, что великий физик фактически предсказал и его. Влияние света на магнитные свойства вещества было теоретически доказано гораздо позже. В 1960 году советский физик Л.П.Питаевский показал, что свет, обладающий круговой поляризацией, способен намагнитить среду, которую он освещает. Эффект получил название обратного эффекта Фарадея.

Хотя обратный эффект Фарадея тоже имеет большую практическую значимость, в этой статье речь пойдет только о прямом магнитооптическом эффекте, ведь наша цель – управлять светом, используя магнитное поле.

## Спин и поляризация фотонов

Напомним, что можно говорить о естественном, т.е. неполяризованном, свете, а также можно выделить три основные состояния поляризации: плоская, круговая и эллиптическая поляризации. В общем случае поляризованный свет обладает эллиптической поляризацией, т.е. траектория проекции конца вектора напряженности электрического поля волны на плоскость, перпендикулярную направлению ее распространения, является эллипсом. Наибольший практический интерес представляют два крайних случая эллиптической поляризации: линейная поляризация, когда эллипс вырождается в отрезок, и круговая поляризация, при которой эллипс превращается в окружность.

С квантово-механической точки зрения, понятие поляризации света связано с наличием у фотона спина. Фотоны, как частицы с нулевой массой покоя, могут находиться в двух состояниях со значениями момента импульса  $\pm\hbar$  ( $\hbar$  – постоянная Планка), направленного вдоль импульса фотона. Такие фотоны обладают круговой поляризацией: левой, когда квантовое число  $m = +1$ , или правой, когда  $m = -1$ . Эллиптически поляризованные фотоны находятся в состоянии, которое складывается из состояний с  $m = \pm 1$ ; при линейной поляризации суперпозиция этих состояний такова, что средняя проекция момента на направление импульса равна нулю.

### Эффект Фарадея

У свободного фотона состояния с  $m = +1$  и  $m = -1$  имеют одинаковые энергии (частоты). В квантовой механике такую ситуацию называют вырождением. Снять вырождение можно при помощи внешнего магнитного поля, направленного вдоль волнового вектора (предполагается, что фотон распространяется в среде с показателем преломления  $n$ ). В магнитном поле компоненты с  $m = \pm 1$  будут распространяться с разными фазовыми скоростями:

$$v_{\phi\pm} = \frac{c}{n}(1 \pm Q).$$

Здесь  $c$  – скорость света,  $n$  – показатель преломления среды, а  $Q$  – специальный магнитооптический параметр. В немагнитных средах параметр  $Q$  пропорционален магнитному полю и в не очень больших полях (магнитная индукция не превышает 200–300 мТл) имеет типичное значение порядка  $10^{-6} - 10^{-4}$ . В ферромагнитных материалах этот параметр отличен от нуля даже в отсутствие поля и достигает величин  $10^{-3} - 10^{-1}$ . Он определяется внутренним магнитным полем, которое создается атомами и ионами кристаллической решетки магнетика.

Но с фазовой скоростью непосредственно связан показатель преломления среды:

$$n = \frac{c}{v_{\phi}}.$$

В результате получается, что в магнитной среде волны, поляризованные по часовой стрелке и против нее, преломляются по-разному – возникает явление циркулярного двойного лучепреломления, или гиротропии среды. Явление гиротропии связано с эффектом Зеемана, т.е. с расщеплением линий поглощения света в магнитном поле. Под действием силы Лоренца резонансные частоты вращения электронов по левому и правому кругу смещаются в различные стороны относительно первоначального значения собственной частоты. Это, в свою очередь, и приводит к различию показателей преломления для волн, поляризованных по правому и по левому кругу. Экспериментально при этом наблюдается эффект Фарадея, проявляющийся в том, что плоско поляризованный свет, распространяясь вдоль направления намагниченности, испытывает поворот плоскости поляризации на некоторый угол.

Чтобы объяснить это явление, представим плоско поляризованную волну как сумму левой и правой циркулярно поляризованных волн. Если обе волны имеют одинаковые фазовые скорости, то, распространяясь вместе, они складываются и дают волну, которая плоско поляризована вдоль фиксированного направления. Но если их фазовые скорости различаются, то при распространении одна волна будет обгонять другую и плоскость поляризации суммарной волны будет постепенно поворачиваться – наблюдается эффект Фарадея (рис.1). Угол поворота плоскости поляризации излучения на выходе из ферромагнетика пропорционален магнитооптическому параметру  $Q$  и длине пути волны в намагниченной среде.

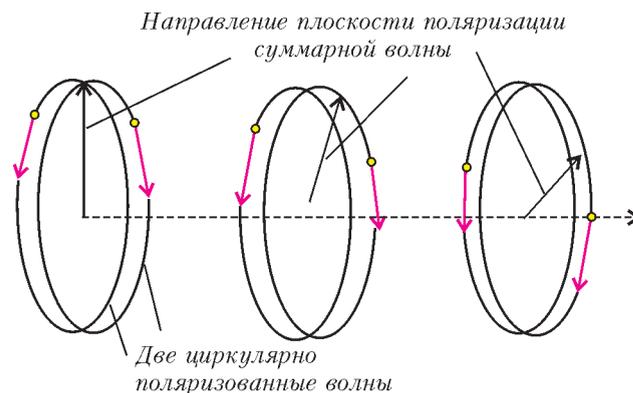


Рис.1. Схематическая иллюстрация эффекта Фарадея

Эффект Фарадея широко используют для наблюдения магнитной структуры в прозрачных пленках, в которых намагниченность перпендикулярна или почти перпендикулярна поверхности пленки. Этот эффект – один из наиболее действенных механизмов управления поляризацией света. Он широко применяется в лазерной технике, информатике и других областях. Можно сказать, что эффект Фарадея является основой магнитооптики – раздела оптики, в котором изучают влияние магнитного поля на оптические свойства вещества.

Наряду с эффектом Фарадея существует множество других магнитооптических явлений, среди которых стоит еще упомянуть эффект Керра. Он состоит в изменении характеристик световой волны при отражении от магнитной среды. При этом, в зависимости от геометрии падения света, будет меняться либо его поляризация, либо интенсивность, либо и то и другое вместе.

### Два пути к совершенству

Магнетизм воздействует на свет, но это действие обычно весьма мало. А как же тогда магнитное поле сможет управлять светом? Ответ вроде бы очевиден: магнитооптические эффекты необходимо каким-то образом увеличить.

В 70-е – 80-е годы прошлого века, когда экспериментальная магнитооптика переживала бурное развитие, ученые шли по пути подбора оптимального химического состава. Одним из наиболее распространенных магнитооптических материалов является ферромагнитный диэлектрик редкоземельный феррит-гранат с ионами висмута. Его химическая формула  $R_x\text{Bi}_{3-x}\text{Fe}_5\text{O}_{12}$ . В ней  $R$  обозначает один или несколько редкоземельных ионов, а  $x$  задает относительную концентрацию редкоземельных ионов и висмута. На основании многочисленных экспериментов были выявлены составы ферритов-гранатов, обеспечивающие в видимом и ближнем инфракрасном свете большие магнитооптические эффекты и малое оптическое поглощение. К примеру, намагниченная пленка феррита-граната состава  $\text{Dy}_{0,5}\text{Bi}_{2,5}\text{Fe}_5\text{O}_{12}$  толщиной 10 мкм способна повернуть плоскость поляризации красного света на угол около  $20^\circ$ , что вполне подходит для возможных применений. Однако в поиске подходящего состава вещества в конце концов наступило насыщение, и прогресс затормозился.

К счастью, существует и другой альтернативный подход, связанный с так называемыми оптическими наноструктурированными материалами – средами, оптические свойства которых (например, показатель преломления) изменяются в пространстве на масштабе менее нескольких сотен нанометров. Ярким примером таких материалов являются фотонные кристаллы.

Фотонные кристаллы – это периодические диэлектрические или металло-диэлектрические материалы, которые воздействуют на распространяющиеся по ним световые волны таким же образом, как и периодический потенциал в кристаллах влияет на движение электронов, приводя к образованию разрешенных и запрещенных энергетических зон. Поскольку в основе идеи фотонного кристалла лежат явления дифракции и интерференции, то период структуры фотонного кристалла должен быть порядка длины волны электромагнитного излучения в веществе, т.е. около 300 нм для работы в диапазоне видимого света. Примером одномерных фотонных кристаллов служит многослойная структура из чередующихся слоев прозрачных веществ с двумя различными показателями преломления (рис.2,а). Система параллельных отверстий в диэлектрическом слое формирует двумерный фотонный кристалл (рис.2,б), а плотно упакованные наносферы

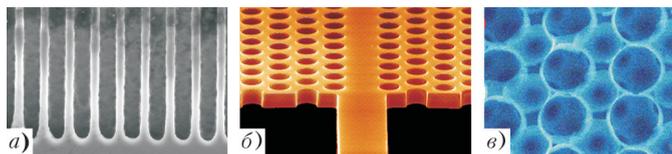


Рис.2. Одномерные (а), двумерные (б) и трехмерные (в) фотонные кристаллы

кварца представляют собой трехмерный фотонный кристалл (рис.2,в).

Чем же замечательны наноструктурированные материалы и, в частности, фотонные кристаллы? Тем, что их оптические свойства – направление, интенсивность и поляризация отраженного и прошедшего света – определяются не только и даже не столько показателями преломления веществ, из которых они сделаны, а их структурой. Специально подобранная структура вещества приводит к явлениям интерференции и дифракции, существенно меняющим условия прохождения света через материал. Так, в фотонных кристаллах возникают запрещенные зоны – области частот света, при которых свет не может проникнуть внутрь фотонного кристалла и полностью отражается от него. Появление наноструктурированных материалов фактически открывает новое направление в создании оптических сред. Необходимые оптические свойства материала достигают теперь не путем подбора оптимального химического состава (как это было в старом подходе), а путем создания геометрической или фазовой структуры с характерным размером, не превышающим нескольких сотен нанометров. Поскольку наноструктурированные материалы создают искусственно, их часто называют метаматериалами.

### Намагниченные фотонные кристаллы

Если наноструктурированный материал содержит магнитные вещества, то можно ожидать, что в нем будут наблюдаться магнитооптические эффекты, аналогичные тем, что возникают в обычных однородных средах, но, возможно, несколько измененные. Идея использовать для управления света в фотонном кристалле магнитные вещества впервые была предложена в конце 90-х годов минувшего столетия японскими учеными. Они рассмотрели эффект Фарадея в одномерных фотонных кристаллах, представляющих собой многослойные пленки из хаотично чередующихся слоев висмут-замещенного иттриевого феррита-граната и кварца. Для определенных частот излучения при оптимально подобранных параметрах структуры было обнаружено увеличение эффекта Фарадея более чем в 300 раз по сравнению с аналогичной однородной средой.

На примере одномерного случая можно выделить несколько разновидностей магнитных фотонных кристаллов. Прежде всего, это стандартные системы, состоящие из чередующихся четвертьволновых (толщина равна одной четвертой длины волны света в веществе) магнитных (например, церий-замещенный иттриевый феррит-гранат) и немагнитных (например, гадолиний-галлиевый гранат) слоев. Такие фотонные кристаллы обладают запрещенной зоной с центром на проектировочной длине волны, т.е. не пропускают свет с длиной волны в некоторой области вокруг данной. Под проектировочной длиной волны подразумевают длину волны света вне кристалла, при которой в каждом из его слоев укладывается одна четвертая длины волны. На рисунке 3,а и б показаны зависимости коэффициента пропускания и угла Фарадея для одномерного фотонного кристалла, настроенного на ближний инфракрасный диапазон (проектировочная длина волны 1,55 мкм). Кристалл состоит из 30 пар магнитного и немагнитного слоев. Усиление эффекта Фарадея возникает на границе запрещенной зоны, т.е. в районе длин волн 1,49 мкм и 1,61 мкм. Оказывается, именно на этих длинах волн резко возрастает групповая скорость света. Это приводит к тому, что возрастает эффективное время взаимодействия волны с намагниченностью материала, а значит, и увеличивается эффект Фарадея.

Важной особенностью резонансов на граничных частотах является то, что максимумы прохождения и фарадеевского вращения практически совпадают. Это позволяет использовать фотонные кристаллы в качестве миниатюрных элементов, вращающих плоскость поляризации на большие углы. Оптимальный подбор магнитных материалов, их геометрических размеров и расположения позволит создать новое поколение оптических устройств, управляемых магнитными полями. При этом нужно иметь в виду не только инфракрасный, но и видимый диапазон света.

В одномерных магнитных фотонных кристаллах можно создать структурные дефекты – несколько раз инвертировать порядок следования слоев и тем самым получить один или несколько слоев с удвоенной толщиной. Наличие таких дефектов приводит к появлению в

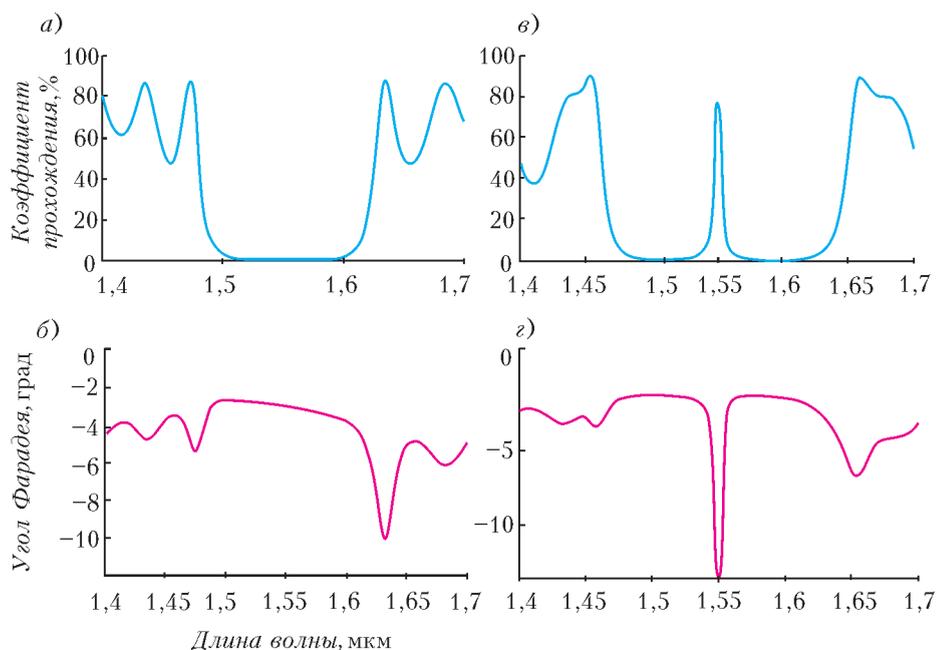


Рис.3. Оптические свойства в ближнем инфракрасном диапазоне одномерного магнитного фотонного кристалла, состоящего из 30 пар магнитного и немагнитного слоев с идеальной периодичностью (а,б) и со структурным дефектом (в,г)

фотонной запрещенной зоне узких резонансных уровней, на частотах которых прохождение света близко к стопроцентному (рис.3,в). Вместе с тем, групповая скорость излучения на этих резонансах вновь оказывается очень малой, и эффект Фарадея при этом резко возрастает (рис.3,г). В результате удастся получить пик пропускания нужной ширины и большой угол Фарадея. К примеру, на длинах волн ближнего инфракрасного диапазона с помощью таких фотонных материалов удастся получить угол поворота поляризации света на  $45^\circ$  на расстоянии всего 1,5 мкм, в то время как для той же однородной среды указанный угол поворота достигается на расстоянии, в 150 раз большем.

Однако усиление эффекта Фарадея в фотонных кристаллах впервые было экспериментально продемонстрировано японскими учеными на структуре другого типа. Она представляет собой магнитный микрорезонатор – внутрь немагнитного резонатора помещают слой магнитного материала. Хотя изготовить такую систему проще, чем предыдущие разновидности магнитных фотонных кристаллов, она демонстрирует все же менее впечатляющие результаты.

В последние несколько лет начали исследовать и многомерные магнитные фотонные кристаллы. Работа с такими системами существенно расширяет круг наблюдаемых эффектов, а также приводит к новым интересным применениям. Экспериментальные и теоретические исследования двумерных и трехмерных магнитных фотонных кристаллов активно ведутся в нашей стране (в МГУ им. М.В.Ломоносова, в Физико-техническом институте им. А.Ф.Иоффе), а также в Японии, Австралии, Швеции и ряде других стран. В большинстве случаев

экспериментальной реализации эти структуры представляют собой коллоидные растворы упорядоченных частиц сферической или цилиндрической формы. Например, созданы двумерные коллоидные фотонные кристаллы, состоящие из стеклянных волокон, покрытых никелем. Резкое увеличение эффекта Фарадея было зафиксировано в трехмерных коллоидных кристаллах из кварцевых сфер, промежутки между которыми заполнены магнитной жидкостью насыщенного раствора нитрата диспрозия в глицерине.

До сих пор мы говорили только про усиление в фотонных кристаллах эффекта Фарадея. Однако необходимо отметить, что и другие магнитооптические эффекты могут быть существенно усилены благодаря специально подобранной оптической структуре среды. Следовательно, имея в руках образец такого фотонного кристалла толщиной всего несколько микрометров, можно действительно эффективно управлять светом, в первую очередь меняя его поляризацию.

### Магнитооптика на службе

Настало время поговорить о том, где может использоваться магнитооптика. Начнем с передачи информации. Поскольку в оптических компьютерах биты информации передаются световыми волнами, то для их реализации нужно научиться менять или, говоря иначе, модулировать с высокой частотой интенсивность света. Вот здесь и должен пригодиться усиленный эффект Фарадея.

Действительно, магнитооптический модулятор можно организовать так: расположить магнитный фотонный кристалл с большим магнитооптическим параметром между двумя поляризаторами, скрещенными под углом  $45^\circ$ , и менять его намагниченность внешним магнитным полем в таких пределах, чтобы угол поворота плоскости поляризации также составил  $45^\circ$ . Тогда при максимальной намагниченности, например, вдоль оси ОХ поляризация света на выходе из слоя окажется параллельной направлению пропускания анализатора, и почти вся световая энергия пройдет через модулятор. В то же время при максимальной намагниченности слоя против оси ОХ плоскость поляризации света повернется в противоположную сторону и будет перпендикулярна оси анализатора – свет полностью поглотится. При промежуточных значениях намагниченности угол Фарадея будет меньше  $45^\circ$ , и только часть излучения выйдет наружу. Получается, что, изменяя магнитное поле, удастся влиять на интенсивность прошедшего света. Очень важным фактором при этом является скорость переключения. Магнитные материалы позволяют достигать частот переключения вплоть до десятков гигагерц, что соответствует времени переключения порядка долей наносекунды. (Для

сравнения стоит сказать, что переключение в жидкокристаллических веществах происходит за микросекунды.)

Эффективно и быстро изменять интенсивность светового потока крайне важно не только в фотонных чипах оптических компьютеров будущего, но и в других оптических устройствах. Например, на базе магнитного фотонного кристалла можно создать миниатюрные ячейки, пропускающие свет заданного цвета – красного, синего или зеленого. Такие ячейки можно объединить в единую систему и из получившихся пикселей создать монитор или видеопроектор (рис.4). Адресно прикладывая внешнее магнитное поле к цветным пикселям, можно управлять яркостью того или иного цвета и придавать пикселю требуемый оттенок, формируя яркое, насыщенное цветное изображение.

Сейчас все большую популярность приобретает так называемая электронная бумага – гибкий монитор, позволяющий читать электронные книги и газеты. В настоящее время уже появились такие устройства, обеспечивающие черно-белое изображение. Оказывается, магнитное поле здесь тоже может оказаться полезным. Как следует из совсем свежей работы корейских ученых, магнитные фотонные кристаллы, состоящие из магнитных наночастиц в полимерных микросферах, могут позволить сделать следующий

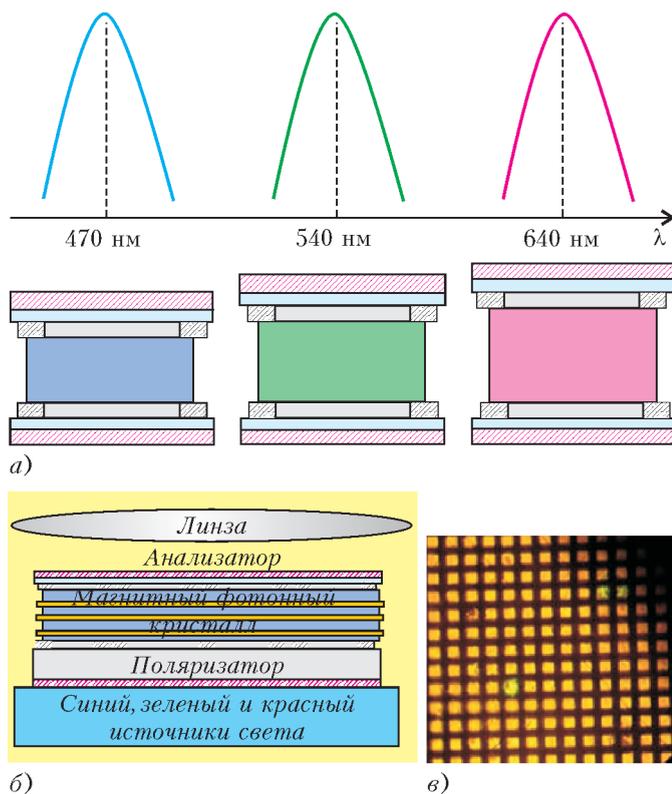


Рис.4. Принцип действия магнитооптического видеопроектора. Три магнитных фотонных кристалла, настроенных на синюю (470 нм), зеленую (540 нм) и красную (640 нм) длины волн, и спектры их пропускания (а); схема магнитооптической ячейки (б); пиксельная структура магнитооптического дисплея (в)

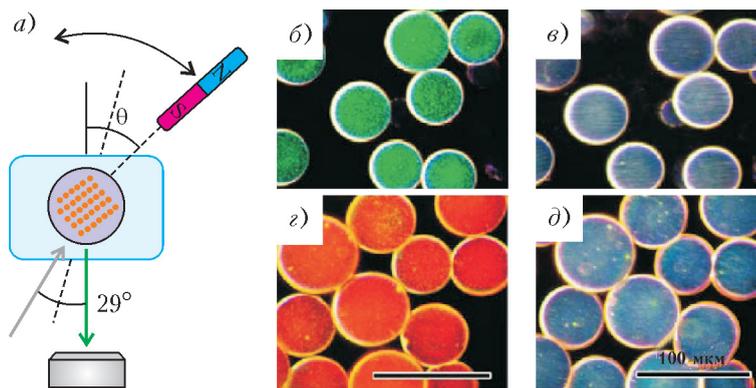


Рис.5. Полимерная микросфера с фотонным кристаллом внутри изменяет цвет отраженного излучения при повороте под действием магнитного поля (а). Микросферы двух различных размеров: во «включенном» состоянии, т.е. ориентация цепочек магнитных наночастиц в фотонном кристалле параллельна лучу зрения (б, г), и в «выключенном» состоянии, т.е. ориентация перпендикулярна лучу зрения (в, д)

шаг – создать цветную электронную бумагу. Принцип действия элемента такого фотонного кристалла схематически изображен на рисунке 5. Микросфера с магнитным фотонным кристаллом внутри может свободно вращаться, будучи взвешена в машинном масле. Если излучение падает в направлении магнитной цепочки (или под острым углом меньше  $15^\circ$ ), то цвет отраженного излучения определяется в основном расстоянием между наночастицами. Если же под действием магнитного поля частица повернется так, что цепочки магнитных частиц ориентируются перпендикулярно лучу света, то микросфера станет бесцветной. Таким образом, в данном случае магнитное поле помогает управлять цветом не непосредственно через магнитооптические эффекты, а опосредованно – ориентируя фотонный кристалл нужным образом. В то же время и про эффект Фарадея тоже не стоит забывать. Не исключено, что и в такой структуре он окажется полезным для дополнительного воздействия на поляризацию света.

Усиленное влияние магнитного поля на свет можно использовать не только ради изменения характеристик света, но и для мониторинга самого магнитного поля – в сверхчувствительных сенсорах. Оказывается, что в магнитных фотонных кристаллах и ряде других наноструктурированных магнитных материалах (например, в перфорированных металло-диэлектрических пленках) величина и положение резонансного пика прохождения очень чувствительны к внешнему магнитному полю. Следовательно, помещая магнитную наноструктуру во внешнее магнитное поле, можно, измеряя интенсивность прошедшего света, судить о величине и направлении поля.

### Магнитофотоника

Мы обсудили лишь некоторые применения магнитооптических эффектов, которые далеко не исчерпывают все возможности и преимущества управления светом с помощью магнитного поля. В настоящее время постоянно появляются новые идеи и разрабатываются новые магнитооптические устройства. Недавно даже было

введено специальное название для этого направления исследований – магнитофотоника, что дополнительно свидетельствует о его актуальности. Знаменитый французский математик А. Пуанкаре отметил, что иногда достаточно изобрести новое слово и это слово впоследствии становится творцом. Так получилось и с фотонными кристаллами: в 1987 году появилось название, а уже через несколько лет возник настоящий шквал исследований, приведший к новым научным и техническим открытиям. Что принесет термин «магнитофотоника», какие новые открытия нас ждут, чем еще полезным окажется открытая Фарадеем взаимосвязь между оптикой и магнетизмом – покажет время. Может быть, именно благодаря магнитофотонике станут явью фантазии научных художников на тему оптических наносхем (одна из таких фантазий изображена на рисунке 6).

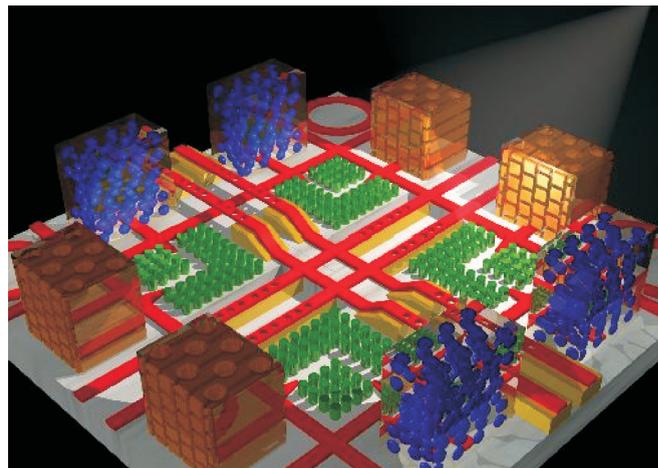


Рис.6. Фантазия художника – фотонный микрополис

## НОВОСТИ НАУКИ

### НОБЕЛЕВСКАЯ ПРЕМИЯ ЗА «ШКОЛЬНУЮ» ФИЗИКУ

Лауреатами Нобелевской премии по физике в 2009 году стали трое ученых. Половину премии получил британский исследователь китайского происхождения Чарльз Као «за выдающиеся достижения, касающиеся передачи световых сигналов в волокнах и развития оптических систем передачи данных». Вторую половину премии разделили американские ученые Уиллард Бойл и Джордж Смит «за разработку оптических полупроводниковых сенсоров – ПЗС-матриц».

Обе награжденные работы были выполнены около 40 лет назад (сегодня младшему из трех лауреатов 76 лет, а



Чарльз Као

Уиллард Бойл

Джордж Смит

старшему – 85). Обе работы не являются теоретическими или экспериментальными в области фундаментальной науки, а относятся к прикладной физике. И по образованию, и по опыту работы их авторы прежде всего инженеры. Что же общего между работой Као и работой Смита и Бойла? В обеих работах важно, что они послужили толчком к разработке устройств, получивших в конце концов широчайшее распространение в науке, технике и, что особенно важно, в жизни людей. Без этих «толчковых» работ осуществление многокилометровых линий телекоммуникаций, основанных на оптоволоконной технике, и внедрение в жизнь современной цифровой видео- и фотоаппаратуры

задержалось бы на неопределенные сроки. Научные основы этих работ несложны – они рассматриваются еще в школьном курсе физики.

В основе оптоволоконной телетранспортиции лежит известное со средневековых времен явление полного внутреннего отражения. Оптическое волокно представляет собой тоненькую (меньше 0,1 мм) «проволочку» из стекла или пластмассы, по которой, в результате многократного полного внутреннего отражения, и распространяется световой сигнал. Эта тонкость обеспечивает гибкость волокна, дающая возможность скручивания нескольких волокон в жгут и передачи световой энергии по самым сложным извилистым путям.

Когда в начале XX века появилась идея использования тонких стеклянных нитей для передачи света, было ясно, что необходимо специальное стекло с очень малым поглощением. В 60-е годы стали использовать кварцевое стекло, но удалось достичь незначительного успеха – оптоволоконно применялось только для передачи световой энергии. Передавать же информацию (модулированные сигналы) удавалось лишь на небольшие расстояния (не более 10 см) – при больших длинах волокна информация сильно искажалась.

Достижение Ч.Као заключалось в том, что он рассчитал влияние примесей на поглощение и рассеяние света и добился получения такого чистого стекла, что его прозрачность увеличилась в миллион (!) раз. Это был революционный прорыв в деле передачи информации подобным способом.

Может возникнуть вопрос: в чем преимущества оптического способа перед другими способами – использованием проводов или радиоволн? Прежде всего, в гораздо большей временной плотности передачи информации – ведь частота света в 100000 раз больше частоты ультракоротких радиоволн или сверхвысокочастотных токов. Немаловажным является также отсутствие влияния на передаваемую информацию со стороны посторонних электромагнитных полей. И, наконец, оказалось, что оптическая передача является самым дешевым способом передачи информации на большие расстояния.

Теоретическая база работы, получившей вторую половину

Нобелевской премии, – это физика твердого тела (полупроводников) и явление внутреннего фотоэффекта. В формулировке премии есть термин «ПЗС-матрица». Это прибор с зарядовой связью, предназначенный для перемещения небольшого избыточного отрицательного заряда по цепочке одинаковых устройств, образующих линейку или сумму линеек – матрицу.

Вначале Бойл и Смит разрабатывали ПЗС как оригинальное устройство компьютерной памяти. Работает оно следующим образом. Маленькая пластинка полупроводни-

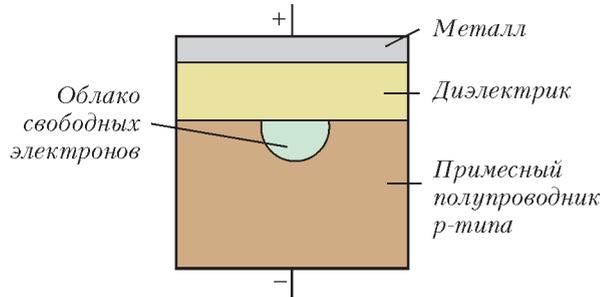


Рис. 1

ка *p*-типа (монокристалл кремния, легированный акцепторной примесью бора) покрывается более тонким слоем диэлектрика и металлической пластиной (рис.1). Между этой пластиной и подложкой полупроводника прикладывается разность потенциалов. Таким образом образуется своеобразный двухслойный конденсатор. Толщина полупроводника порядка 10 мкм, диэлектрика – 1 мкм, а металлического слоя – еще меньше. В примесном полупроводнике *p*-типа концентрация основных носителей – дырок – составляет величину порядка  $10^{22} \text{ м}^{-3}$ , тогда как концентрация собственных носителей заряда – электронов и дырок – много меньше и при комнатной температуре равна примерно  $10^{16} \text{ м}^{-3}$ . В электрическом поле дырки (основные носители тока) перемещаются по направлению поля, поэтому концентрация дырок вблизи границы полупроводника с диэлектриком становится меньше. Зато в этой области увеличивается концентрация собственных (неосновных) носителей – появляется электронное облако. Если рядом будет находиться такое же устройство, то электронное облако почувствует «чужое» электрическое поле и передвинется к соседнему элементу, в котором тоже возникнет несимметрично расположенное облако электронов (рис.2,а). Если теперь выключить поле в элементе 1, то облако в элементе 2 станет симметричным (рис.2,б). Если же рядом с элементом 2 окажется элемент 3, на который подано электрическое поле, то электронные облака в этих элементах сдвинутся (рис.2,в). И если теперь выключить поле в элементе 2, то появившееся в элементе 3 облако станет снова симметричным (рис.2,г). Из таких элементов можно составить линейные цепочки и, усложнив конструкцию, создать двумерную матрицу, в которой информация о наличии заряда и о его величине будет перемещаться от места появления заряда к выходному элементу, где она может быть выражена числом в двоичной системе. Пара элементов, в которых заряд как бы переходит от одного элемента к другому, получила название *пиксель*.

Однако выяснилось, что малая концентрация собственных электронов в полупроводнике не обеспечивает надежности передачи информации. Эту концентрацию следовало увеличить. И появилась идея – увеличить ее за счет фотоэффекта. При поглощении фотона может разорваться валентная связь электрона в кристаллической решетке, и электрон станет свободным (внутри кристалла). Такой фотоэффект называ-

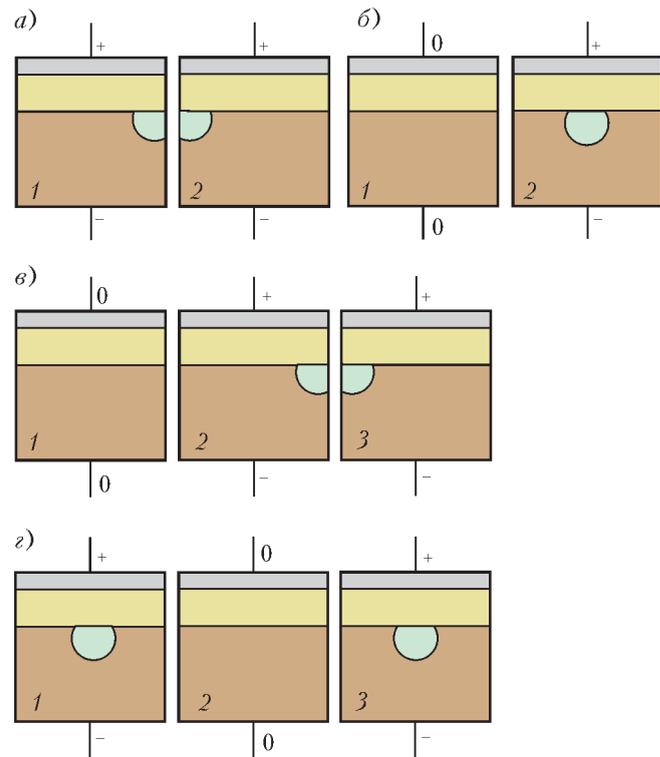


Рис. 2

ется внутренним, а сам полупроводник – фотодиодом. Образующиеся дырки будут перемещаться по направлению поля (на рисунке 2 – вниз), а электроны – к границе с диэлектриком, увеличивая концентрацию электронного облака. Причем концентрация будет пропорциональна числу поглощенных фотонов, т.е. освещенности. Квантовый выход (КПД) такого фотоэффекта оказывается очень высоким – до 80%. Информация от каждого пикселя побегит по строчкам матрицы к прибору, переводящему ее в «цифру». При этом включения и выключения напряжения на отдельных элементах нужно производить с такой частотой, чтобы образующиеся фотоэлектроны не успевали «найти» дырки, с которыми они могли бы рекомбинировать. На пластинке – чипе – размером  $8 \times 15 \text{ мм}$  можно разместить матрицу, состоящую из пяти миллионов пикселей, т.е. получать информацию об освещенности в нескольких миллионах точек изображения.

Потом в конструкцию элементов были внесены изменения. В качестве диэлектрика теперь используется пластинка из кварцевого стекла, а металлической обкладкой конденсатора является очень тонкий (не более 0,1 мкм) слой алюминия, наносимый напылением, – такой слой достаточно прозрачен. Чтобы иметь информацию о цвете, нужно поочередно подавать к пикселям свет, прошедший через различные светофильтры.

Подытоживая, можно сказать, что такой чип представляет собой интегральную микросхему, состоящую из светочувствительных фотодиодов и использующую технологию приборов с зарядовой связью. Этот чип – «сердце» цифровых видео- и фотокамер, которые практически вытеснили обычные (аналоговые) приборы.

Л.Беломухов

## ИНТЕРВЬЮ С Н.Н. КОНСТАНТИНОВЫМ

Николай Николаевич Константинов – выдающийся организатор математического образования, один из создателей системы математических классов в Москве. Бессменный руководитель единственного в своем роде международного математического соревнования – Турнира городов, в котором принимают участие школьники со всего мира. Действительный член Московского общества испытателей природы, Московского математического общества. Представляет в Европе Всемирную федерацию национальных математических соревнований. Преподает в московской 179 школе. Награжден международной математической медалью имени Пола Эрдеша. Недавно получил премию Правительства РФ в области образования за создание Турнира Ломоносова.

Мы попросили его рассказать о себе, о своей работе и о взглядах на математическое образование. Николай Николаевич охотно откликнулся на нашу просьбу.

– *В школе вы увлекались скорее биологией...*

– Увлечение биологией у меня было еще до школы. Семи лет от роду я впервые посадил землянику и пытался сделать из нее клубнику. Мне это не удалось. Я себя убедил, что ягоды стали чуть крупнее, когда я их много поливал. Я попросил в библиотеке, уже в эвакуации, т.е. в 1941 году, – я был в третьем классе, – книжку о путешествиях, и мне дали Дарвина, «Путешествие натуралиста вокруг света на корабле «Бигль». В предисловии профессора С.Л.Соболя было написано, что приобретенные признаки не передаются по наследству. Я и сейчас говорю: одно дело что-то выучить по книжке, и совсем другое – пережить эмоционально. Я-то это пережил и очень восприимчивом возрасте. Мне просто смешно, когда люди начинают обсуждать то, где они ничего не прочувствовали, и приходят к заранее намеченным выводам.

Потом я занимался в станции юных натуралистов в Сокольниках, в Ботаническом саду МГУ. Там был ботаник доцент Потапов, который мной руководил. А в девятом классе я ходил в самый хороший кружок, самый сильный, нас водили по кафедрам биофака. Но это был 1947/48 учебный год, а летом 1948 года разразилась катастрофа с биологией, появился Лысенко и так далее. После этого на биофак было бесполезно идти. Не давали книги: запрещено было выдавать учебники. К тому же я увлекся математикой, и для меня это уже не было потерей. Так что увлечение математикой у меня как бы вторичное, и я вижу в этом некоторый плюс. Я все время ощущаю, что потеря математики для меня не есть потеря всего.

– *А что есть потеря всего?*

– Ну если бы еще и биология, и физика, и все остальное умерло для меня, вот тогда это была бы потеря всего.

– *Т.е. математика – одна из нескольких важных вещей.*

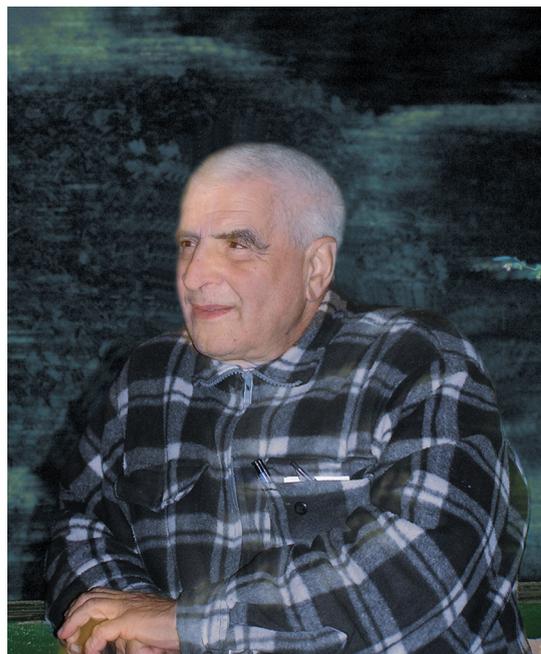
– Да, одна из. Допустим, в математике ничего не получается. Ну что делать, это не повод для самоубийства.

– *А почему вы поступили на физфак МГУ?*

– Конечно, я увлекся физикой – именно в 10, выпускном классе. Наверное, потому, что математика казалась мне тогда несерьезной наукой. На кружках там какие-нибудь зайчики прыгают, красные, зеленые и белые, да еще доказать надо, что красных четное число. Все эти задачи мне казались чем-то игрушечным. Странно этим заниматься. Потом-то я понял, что это, конечно, упражнения. Но думаю, что люди, которые злоупотребляют такими детскими сюжетами, не вполне понимают психологию. Детям нравится, когда их занятия выглядят взрослыми.

– *А в олимпиадах приходилось участвовать?*

– В седьмом классе учитель математики – очень популярный у нас был учитель, когда его сменили, весь класс бастовал, – он порекомендовал мне пойти на олимпиаду, но рекомендация так выглядела, что я не пошел. Он сказал, что проводится такая контрольная работа, лучшие ученики соби-



раются и соревнуются, кто лучше напишет эту контрольную работу. Я подумал: «Вот идиоты, мало им контрольных работ...» А пошел я туда через год потому, что мой сосед по парте сходил на лекцию в университет. Это была воскресная лекция на тему о четырехмерном пространстве. Он вернулся с нее совершенно сумасшедшим, глаза у него были где-то далеко, и он все время рассказывал мне что-то, чего я понять не мог. На следующую лекцию мы пошли вместе. Это была лекция Исаака Моисеевича Яглома об индукции в геометрии. Она произвела на меня потрясающее впечатление, потому что там было много неожиданного. Яглом разговаривает с теми школьниками, которые сидят непосредственно перед ним, и спрашивает: а вот есть такая-то теорема? – надо же, думаю, профессор университета – и не знает, какие есть теоремы. Куда я попал?... Школьники, которые перед ним сидели, не дали ему вразумительного ответа. – «Ну ладно, – говорит Яглом, – какая разница. Докажем ее». Это меня совершенно потрясло. Он не знает, какие есть теоремы, и ему этого и не надо знать. Совершенно неожиданная вещь для школьника, который привык: выполнил задание – получил пятерку, и при этом ничего не узнал.

– *И после физфака хватило наглости преподавать у математиков?*

– Не только после физфака – на пятом курсе физфака я на мехмате объявил семинар по теории функций действительного переменного. Наглости у меня хватало всегда, и сейчас хватает.

Занятия в университете тогда начинались в 10 часов. Естественно: не было метро. Добираться до Ленинских гор было труднее. Автобусы, длинные очереди... А так как нужно было еще аудиторию найти, мы назначили занятия на 8 утра. Занимались человек 15 студентов первого курса, которые всегда приходили к восьми. Некоторые из них стали впоследствии очень сильными математиками. Среди них были Коля Розов; Женя Голод, самый сильный; Саша Вентцель; Ира Виноградова; Леня Бокуть. Были еще люди, которых я по фамилии забыл. Семинар был достаточно сильный, он длился один семестр и кончился тем, что я дошел до предела своих знаний. Дальше мне самому надо было что-то раскапывать.

Позже я собрался поступать в аспирантуру к Алексею Андреевичу Лянунову, потому что он занимался кибернетикой, а я в это время был просто потрясен статьей Л.В.Кру-

шинского про экстраполяционные рефлексy. Я к тому времени уже пять лет проработал на физфаке преподавателем математики, но когда я прочитал Крушинского, я был просто ошеломлен. Настолько это было для меня фантастически интересно. Хотя я не понимал, чем я там могу быть полезен. Но я бросил преподавание на физфаке и пошел в аспирантуру. Я преподавал вроде бы успешно, но когда почувствовал, что двойки стал ставить равнодушно, понял, что с этой работы надо уходить. Думаю, многие люди не замечают этой грани.

– *Работы Крушинского потрясли вас тем, что он пытался понять, как устроен мозг?*

– Ну, что-то совершенно новое. Я понимал, что бывают, скажем, условные рефлексy, но это что-то совершенно другое. Дело в том, что условные рефлексy – ну, например, у осьминогов – они уже появляются, но в зачаточном состоянии, очень слабые. У многих рыб даже вообще не обнаруживается ничего подобного. А пространственная ориентация есть раньше. Т.е. это, может быть, более фундаментальная вещь.

– *А как возник мультфильм, в котором ходила как живая компьютерная кошечка?*

– Это было в 1968-м году. В это время появилось АЦПУ. До этого была только узкая-узкая ленточка с цифрами, даже букв не было. Она шла с бешеной скоростью, и потом было целое искусство все это читать. Появилось АЦПУ-128, а 128 потому, что 128 символов в строчке – длинная строчка. И сразу появилась мода делать картины: ну, например, портрет Ленина, выбитый буквами. Понятно, что здесь компьютер ни при чем. Но раз появилась возможность делать рисунки, значит, появилась возможность делать мультфильмы.

Толчком было вот что. Мой бывший студент, Валера Иванов, который кончил кафедру биофизики, делал такой кукольный фильм. Из пластмассовых шариков сделал модель молекулы ДНК и стал показывать, как она может деформироваться. Делал он это, как делают кукольные фильмы. В одном состоянии сфотографировал, потом чуть-чуть повернул, снова сфотографировал, и так далее, а потом показывает фильм. А я ему и говорю, что это нужно делать на компьютере, потому что когда ты поворачиваешь руками, у тебя точность потрясающе плохая, и даже если и можно сделать фильм для показа, для научной работы его использовать совершенно невозможно. Давай сделаем фильм компьютерный. А для этого надо было подумать, как информацию организовать. Первоначально в обсуждении участвовало несколько человек, потом реально работало трое. Кроме меня, еще Владимир Пономаренко и Виктор Минахин.

Удивительно, что сделано это в 1968 году, сорок лет тому назад, и на все это время все как бы забыли про эту вещь, потом вдруг вспомнили.<sup>1</sup>

– *А почему у вас возникла идея заниматься со школьниками?*

– Сначала, когда я еще учился на физфаке, я со школьниками не работал. Но у меня были грамоты на олимпиаде, и со мной стали носиться немножко, включили в научно-студенческое общество, и так далее... Короче, на втором курсе я был зампредом городской физической олимпиады. Как-то было естественно, что я в этой области. Ну и мы с Игорем Иванчиком, это мой однокурсник, решили вести физический кружок в большой аудитории для всех желающих, каждый раз могут приходить новые люди, сто человек присутствуют... Нам предоставили возможность готовить демонстрационные эксперименты, весь кабинет физических

демонстраций был в нашем распоряжении. Мы могли делать любые эксперименты для себя, а потом выбирали, что мы показываем. И там были два великих человека, Сергей Иванович Усагин и второй – Валентин Семенович, забыл фамилию. Это были такие русские умельцы без всякого образования, у которых все всегда работает. Отец Сергея Ивановича был такой же, он изобрел трансформатор. Нечаянно. Это было для меня очень полезно, и, наверное, школьникам было интересно. В общем, мы довольно долго с Игорем вели такой кружок. Когда я уже окончил физфак и стал ассистентом на втором курсе, то моими студентами были мои бывшие школьники. Так оно само собой и получилось, что я стал вести кружки. Но это были физические кружки, а математические я не вел сначала, их вели мои друзья-мехматяне. Вот кто-то из них уезжает на каникулы и просит два занятия провести вместо него.

Так я понемножку втянулся в математические кружки, а к пятому курсу до того обнаглел, что для студентов первого курса мехмата организовал семинар. И я понял тогда удивительную вещь, абсолютно новую для меня. Уровень взаимопонимания между преподавателем и студентом становится совершенно иным, когда преподаватель принимает задачи. Эта систематическая работа, когда я пытаюсь понять твою мысль, а ты пытаешься понять мою мысль, – это совершенно иной уровень взаимопонимания, чем тот, что бывает, когда лектор читает лекцию. А особенно сейчас – дистанционно... человек, сидя дома, может слушать лекцию в университете... там не будет этого уровня. Неизбежно получается поверхностно. Он и вопрос не может задать. Я не против дистанционного обучения, только надо понимать, что оно не всегда может что-то дать. Если не требуется глубокое взаимопонимание, например – лекция на тему «Есть ли жизнь на Марсе», то вполне можно. Вот я пью кофе, одновременно слушаю лекцию «Есть ли жизнь на Марсе», это нормально, это не плохо. Однако в математике практически нет случаев, чтобы математик не имел руководителя. И руководитель должен быть достаточно толковым. Есть замечательное высказывание Леонардо да Винчи: «Плох тот ученик, который не превосходит своего учителя». Владимир Игоревич Арнольд тоже всегда подчеркивает это: что молодежь лучше решает задачи, чем мы, которые их учим. Иначе прогресса бы не было.

– *Толчком к тому, чтобы вести кружок, была именно вот эта мысль: что именно общение преподавателя с учеником, когда решаются задачи, обсуждаются – очень важно?*

– Да. Кружок или класс.

Я просто из любопытства приходил в кружок Андрея Лемана и Андрея Леонтовича. Очень сильный был кружок, но, правда, и с некоторым элементом халтуры. Ну, например: «Как, – говорит Леман, – вы не знаете аналитической геометрии? Ну я вам сейчас расскажу. Вот уравнение прямой, вот уравнение эллипса. Все понятно?» Т.е. годовой курс – или полугодовой – за несколько минут.

– *Это был знаменитый кружок «Альфа»?*

– Нет, это был кружок Лемана и Леонтовича.

В это время появилось много школьников это были люди, родившиеся после войны. И появилась мода читать для них лекции по современным разделам математики. А я подумал, что, собственно, начинающим не современная же математика нужна. Что они там поймут в современной математике, когда они не знают ничего. И вот когда ребята меня спросили, – ребята из кружка Лемана и Леонтовича, – советую ли я им пойти на какие-то лекции, то я сказал: давайте лучше я вам сам дам задачи, и вы попробуете. И я стал давать им задачи, и так возник первый вариант программы матшколы. Вот это и был кружок «Альфа». Там работало всего четыре-пять школьников.

Кружок «Бета» был задуман гораздо сильнее. Мы решили со Славой Цуцковым – это был такой очень сильный

<sup>1</sup> Подробно обо всем этом можно прочитать в статьях «Прибытие кошечки» и «Знает ли кошка, что она не настоящая» (журнал «Компьютерра», номер 7 за 2006 год). А сам мультфильм теперь можно найти в Интернете: <http://www.etudes.ru/ru/mov/kittie/index.php>

школьник, который учился в кружке у студента Арнольда, потом поступил на физфак.

– У Владимира Игоревича?

– Да. Слава потом погиб, это трагическая история. Он провел кружок для школьников по квантовой механике. Но он не мог никакого математического аппарата им рассказать, потому что ничего они не знают. И вот тогда мы решили сделать такой кружок, чтобы дать им тот математический аппарат, с помощью которого они смогут написать и понимать все уравнения электродинамики и квантовой механики. Это был кружок «Бета». А ребята из кружка «Альфа» были помощниками. Так как там была твердая цель, чтобы они нечто усвоили, нам пришлось ввести фашистский режим. Дисциплина была как в гестапо. Человек, который не выполнил хотя бы одно задание, исключается из кружка. Но может прийти, если задание выполнит. Семьдесят человек дошло до конца. Но по дороге погиб Цуцков. И я дальше не мог продолжать – у меня не было в голове таких знаний, чтобы провести кружок по квантовой механике. Но до электродинамики я их довел. Так вот, из всех учеников один человек продолжил ту работу, ради которой этот кружок начался. Это Александр Комеч. Кстати, из кружка «Альфа» вышел Григорий Маргулис – у него медаль Филдса.

– Это очень сильный математик.

– Да. Ну, он, конечно, в основном не у меня учился, а у своего отца. У меня тоже, но я не имею морального права считать его своим учеником.

– А как возникла идея матикол?

– Эта идея возникла у А.С.Кронрода. Я понимал, что мне придется кружковскую деятельность свернуть.

– А он стал уговаривать – давай, мол, наберем маткласс?

– Да. Если, – говорит, – ты не согласишься, то я тогда свою договоренность сверну, прочту там какие-то лекции...

– И так возник первый класс.

– Да. Но еще раньше, чем первый класс, была просто группа. Никакого нового класса, а просто в старом классе группа, в которой велись специально какие-то дополнительные занятия.

– Тогда же появилась система листков, о которой все говорят: вот, Константинов придумал систему листков?

– Ну, систему листков я придумал, когда у меня был кружок «Альфа». Потому что надо было, чтобы все занятия сохранялись. Если человек пропустил, чтобы он ничего не потерял. Идея очень простая и понятная.

Листки – чисто практическая вещь. У меня к этому времени – я же пять лет работал на физфаке – был реальный опыт преподавания, и я уже понял, что система преподавания, которая существует в МГУ, – лекции и семинары, – находится на пределе своих возможностей. Из нее нельзя больше ничего извлечь. У одного человека 25 студентов. Если я задаю какое-то домашнее задание, то максимум, что я могу – пройти по рядам и увидеть: у людей что-то написано. Или тщательно посмотреть, как один человек работал, например. Я даже коллоквиум устраивал, чтобы проверить, что они знают. Приглашал своих друзей. Но это не было предусмотрено программой.

А в кружке «Альфа» требовалось все задачи сдать – неправильно же, когда каждую десятую задачу проверил, а на остальное наплевать, – ну как на экзаменах: из 30 вопросов ты один знаешь – и слава богу, вот тебе пятерка. Смешно? А почему-то другим не смешно.

– Т.е. важная идея системы листков – что человек должен решить сам много задач, а не просто прочитать что-то в учебнике.

– Да, он должен прорешать, а я должен принять.

Понятно, что это не единственный способ преподавания.

Почему в анализе этот способ идет хорошо? Потому что в анализе очень мало теоретического материала и очень много упражнений. Фактически, если ты знаешь определение пре-

дела, то дальше море задач, и уже нечего читать, кроме как рассказывать решения этих задач. Далекое не все предметы так устроены. Бывает нужно построить архитектуру какую-то, только после этого задачи появляются. А в анализе почти нет этой архитектуры, фактически самая начальная часть анализа состоит из единственного определения. Все конструкции почти одинаковы. Нужно этим овладеть.

Когда я начал преподавать на физфаке, я был потрясен тем, что никто мне не объяснял, как надо преподавать. Полная свобода. Делай что хочешь. Да, я понимал, что им придется сдать зачеты, уже какая-то программа появлялась.

– Значит, одна из причин того, что был выбран анализ – то, что он подходит...

– Нет, не в том, что он подходит. Я смотрю – написано в программе: определение предела – 6 часов. Я думаю: что за бред. Чтобы сформулировать определение, 6 часов не надо. А чтобы им овладеть – этого мало.

Вот так листки и появились. Меня сейчас спрашивают некоторые иностранцы: вот вы начали в 1980 году Турнир городов. Но ведь тогда не было электронной почты! Как же вы работали? – Ну как – обычной почтой работали. Не было электронной, а обычная была. Надо было заранее задачи послать, вот и все. – А как же система листков, у вас же не было принтеров в 1961–1962 году? – Ну да, принтеров не было. Я 17 экземпляров папиросной бумаги закладывал в пишущую машинку.

– Давайте про Турнир городов поговорим. Это ведь особая олимпиада. Например, в турнире зачет происходит по трем задачам из пяти-семи. Это отличает его сразу от всех олимпиад. Мы не стремимся к тому, чтобы человек пытался все решить, мы хотим, чтобы он выбрал то, что ему нравится.

– Совершенно верно. Вот, например, недостаток Международной олимпиады в том, что там нужно быть универсалом обязательно, в то время как чтобы быть ученым, вовсе не обязательно быть универсалом. А международник должен быть всеяден. Но это скорее подготовка менеджеров фирм, чем математиков.

– Еще Турнир городов – олимпиада самого высокого уровня, но принимать участие может любой.

– Совершенно верно.

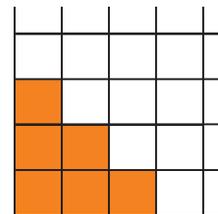
– Еще мы стараемся давать нестандартные задачи.

– Да, конечно, идея такая, что мы стараемся давать людям что-то новое, к чему они заведомо не могли специально готовиться. Вот Павел Кожевников подозревает, что американцы как раз целенаправленно готовятся к тем задачам, которые обычно бывают на международных олимпиадах. Он говорит, что если посмотреть, через какие олимпиады наши ребята пробиваются и через какие – американцы, то американцы попадают туда значительно проще.

– Давайте вспомним несколько примеров ярких задач из Турнира городов.

– Думаю, что яркой была задача Максима Концевича про размножение фишек, ее много раз обсуждали:

На бесконечной клетчатой бумаге отмечено шесть клеток (см. рисунок). На некоторых клетках стоят фишки. Положение фишек разрешается преобразовывать по следующему правилу: если клетки соседняя сверху и соседняя справа от данной фишки обе свободны, то в эти клетки ставится по фишке, а старая фишка убирается. Ставится цель за некоторое количество таких операций освободить все шесть отмеченных клеток.



Можно ли достигнуть этой цели, если в исходной позиции а) имеются всего 6 фишек, и они стоят на отмеченных клетках; б) имеется всего одна фишка, и она стоит в левой нижней отмеченной клетке.

Было много ярких задач Агниса Анджанса.

– А задача Серджи Маркелова про параллелепипед:

Дана коробка (прямоугольный параллелепипед), по поверхности (но не внутри) которой ползает муравей. Изначально муравей сидит в углу. Верно ли, что среди всех точек поверхности на наибольшем расстоянии от муравья находится противоположный угол? (Расстоянием между точками, с точки зрения муравья, является длина кратчайшего пути между этими точками, проходящего по поверхности параллелепипеда.)

– Это здорово, да. У Маркелова несколько таких задач. Вот еще красивая его задача:

На берегу круглого озера растут 6 сосен. Известно, что если взять такие два треугольника, что вершины одного совпадают с тремя из сосен, а вершины другого – с тремя другими, то в середине отрезка, соединяющего точки пересечения высот этих треугольников, на дне озера находится клад. Неизвестно только, как нужно разбить данные шесть точек на две тройки. Сколько раз придется опуститься на дно озера, чтобы наверняка отыскать клад?

Она по форме своего изложения кажется задачей на комбинаторику, а на самом деле – задача по геометрии.

– Отличная задача была про карточные фокусы.

– Да, безусловно:

а) Двое показывают карточный фокус. Первый снимает пять карт из колоды, содержащей 52 карты (предварительно перетасованной кем-то из зрителей), смотрит в них и после этого выкладывает их в ряд слева направо, причем одну из карт кладет рубашкой вверх, а остальные – картинкой вверх. Второй участник фокуса отгадывает закрытую карту. Докажите, что они могут так договориться, что второй всегда будет угадывать карту.

б) Второй фокус отличается от первого тем, что первый участник выкладывает слева направо четыре карты картинкой вверх, а одну не выкладывает. Могут ли в этом случае участники фокуса так договориться, чтобы второй всегда угадывал невыложенную карту?

Эта задача замечательна тем, что она была в ослабленной форме (пункт а) опубликована у Мартина Гарднера, а Гриша Гальперин придумал усиление, очень естественное (пункт б).

Конечно, весь смысл в том, чтобы задачи были яркие.

– Красивые. Или чтобы они были неожиданные. Или вот как мы обсуждали – очень здорово при обучении давать школьникам задачи, в которых напрашивается очевидный ответ, но он неверный.

– Очевидный, но неверный, да. Вот задача про параллелепипед такая. Или задача про сумасшедшую старушку (это уже не из Турнира), сейчас мои кружковцы очень увлеклись:

Каждый из  $N$  пассажиров купил по билету на  $N$ -местный самолет. Первой зашла сумасшедшая старушка и села на случайное место. Далее, каждый вновь вошедший занимает свое место, если оно свободно; иначе занимает случайное. Какова вероятность того, что последний пассажир займет свое место?

– Да, там неожиданный ответ. Пусть наши читатели решают эти задачи.

– Задача про альпинистов – ее уже один американец из тех, что к нам приезжали, в свою книжку поместил как задачу классическую, с неизвестным автором. Я сказал, что вроде я автор...

Среди ровной степи стоит гора. На вершину ведут две тропы (считаем их графиками непрерывных функций), не опускающиеся ниже уровня степи. Два альпиниста одновременно начали подъем (по разным тропам), соблюдая условие: в каждый момент времени быть на одинаковой высоте.

Смогут ли они альпинисты достичь вершины, двигаясь непрерывно, если

а) тропы состоят из конечного числа подъемов и спусков; б) в общем случае?

– А она возникла просто из анализа?

– Нет, она из моих занятий топологией возникла. Она во многом заменяет теорему Жордана. Я это понимал для многоугольника. С моими ребятами мы довели ее до теоремы про непрерывный образ окружности.

– Что он делит плоскость на две части?

– Ровно на две, не на три и не больше. Что делит – это как раз легче, а вот что ровно на две – это труднее. В общем, получилась теорема Жордана. Ну, я так и думал, что она должна получиться, потому что вроде бы альпинисты – это более сильная вещь.

– И эта знаменитая ваша задача о возах тоже возникла из анализа:

Из города  $A$  в город  $B$  ведут две не пересекающиеся дороги. Известно, что две машины, выезжающие по разным дорогам из  $A$  в  $B$  и связанные веревкой некоторой длины, меньшей  $2l$ , смогли проехать из  $A$  в  $B$ , не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись, два круглых воза радиуса  $l$ , центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?

– Это задачи про одно и то же. Задачу о возах обычно новички не могут оценить, потому что они очень быстро придумывают неверное решение и успокаиваются. А Арнольду понравилось... Почему задача о возах стала всемирно известной? Благодаря книжке Арнольда.

– Да, она есть в его учебнике по дифференциальным уравнениям.

– Она не просто есть там, она там первая. С нее начинается. И с моей фамилией. Но он ее решает там с помощью теоремы Жордана. А у меня-то была мысль, что она как раз вместо теоремы Жордана хорошо работает. Она пробивает там, где теорема Жордана не тянет.

– Как к Турниру городов относятся за рубежом наши друзья, почему они в нем участвуют?

– В основном они ценят задачи.

– Еще отдельная тема – турнир Ломоносова, за который в этом году вы получили премию. Это же совершенно уникальное мероприятие. Одновременно проводятся соревнования по многим предметам, в разных аудиториях: там – математика, там – физика, там – литература.

– Оно отличается от Интеллектуального марафона тем, что участие во всех соревнованиях не обязательно. В марафоне есть такая идея по умолчанию, что нам нужны универсальные люди. А в турнире Ломоносова нет этой идеи. Почему, собственно, нам нужны универсальные люди? Нам нужны люди, которые в чем-то могут сделать что-то фантастически интересное. Мечта такая, что вот есть люди, мы их привлекаем, они чем-то заинтересовались, начали учиться. Идея в том, чтобы подтолкнуть людей к серьезному самообразованию – с помощью кружков или как-нибудь еще. А почему нам нужно, чтобы человек был универсальным, вовсе не обязательно, если он увлекся, скажем, физикой – ну и слава богу. Идея, что якобы нужно как-то отдельно выделять и награждать людей, которые как-то по многим предметам показали себя, – я не вижу в этом смысла.

– Человек, когда растет, развивается, и просто сильный и способный человек может разбираться во всем, пока он маленький, пока не слишком сложные задачи. Но человек должен как-то себя найти.

– То, что к нему прилипает, и есть его собственное, то, в чем он отличается от других. Вот что сказал Эйнштейн: специальную теорию относительности придумали бы и без меня, не один, так другой. А вот что касается общей теории относительности, – тут у меня есть подозрения, что бог специально меня послал на Землю, чтобы я придумал именно ее.

Может быть, никто другой бы не придумал. Это было его родное, то, что было ему свойственно.

Так что мне кажется, нужно одобрять, если человек интересуется и тем, и другим, и третьим, но культивировать это совершенно не обязательно.

– На турнире Ломоносова человек, который в школе не заинтересовался каким-либо предметом, может увидеть, что этот предмет может быть интересным.

– А для этого нужно, чтобы аудитории были рядом.

– Конкурсы небольшие, можно часок посидеть здесь, потом пойти туда...

– Поэтому очень важно, чтобы оргкомитет состоял из единомышленников, чтобы не было такого, что каждый тянет на себя.

– Как вы относитесь к ЕГЭ?

– Я думаю, что ЕГЭ – это очень вредная идея, уже видно, что люди не собираются ни о чем думать, а только знают, как готовиться к тому, чтобы ответить правильно на вопросы. В пользу ЕГЭ говорит какое-то высшее упрямство. Здесь у меня такой полуоптимизм. В 1943 году Сталин придумал разделить мальчиков и девочек в школах. Это длилось десять лет. В 1953 году, как только Сталин умер, это сразу отменили.

– Т.е. это не что-то естественное, это блажь каких-то людей, и возможно, она пройдет.

– Блажь. Может быть, она связана с деньгами – кто-то там что-то зарабатывает, но по крайней мере это блажь.

– Я хотел спросить про математику и физику. Иногда их противопоставляют, кто-то говорит – нет, математика – это часть физики, кто-то – что это только инструмент для физики. Как человек, который знает и математику, и физику, что вы могли бы сказать по этому поводу?

– Во-первых, физику я не знаю. Математику тоже не знаю. Ну, конечно, прикоснулся немножко к тому и другому.

Конечно, они разные. Например, есть принцип Гюйгенса – Френеля, – это как рассчитывать интерференционную картинку. То, что там два имени, и одно из них – Гюйгенс, говорит о том, что он появился в XVII веке. Он до сих пор не доказан, но это никого не волнует. Вот если собака определяет истину с помощью носа, человек – больше с помощью глаза, то математики и физики – они разными органами воспринимают. Математики считают, что все должно быть доказано. Физики считают, что нужно найти объяснение явления. У них явление, которое наблюдается, – это исходная позиция. Надо ему найти объяснение. Например, явление сверхтекучести гелия математически описал Ландау. Это считается его крупным достижением. Но это приближенное вычисление, и оценка ошибки не существует. Тем не менее физики считают, что они теперь понимают, почему это происходит.

– Но, с другой стороны, математики тоже хотят разобратся в каких-то явлениях, в каких-то теоремах, ситуациях. Они же не просто жонглируют формулами.

– Конечно. Но частично это есть. Ну, например, очень многие следствия аксиомы выбора – я знаю физиков, которые говорят, что это математические фантомы.

Это, конечно, логическое следствие аксиом, которые они приняли, но это не имеет отношения к реальной действительности. Математические фантомы, следствия неудачно придуманных аксиом. А сейчас у математиков развивается мысль, что нужно ограничиться счетной аксиомой выбора, и тогда многие фантомы пропадают. Например, неизмеримые множества исчезают.

Ну, кто его знает. Павел Сергеевич Александров говорил, что это – математическая реальность. Реально то, что из этих аксиом такие следствия получаются. Это математическая реальность, но не факт, что за ней есть какая-то физическая реальность.

Физика как работает? Она создает математическую модель. Еще бывает, что вербальная модель существует сначала, то есть некоторые словесные разговоры о том, как происходит явление. Но это еще не математическая модель. Потом уже создается математическая модель, в нее входят многие вещи из математики. Например, кинематика. Там же

предполагается, что каждая точка имеет координату. Расстояние всегда можно разделить пополам. А в реальной физике, чем меньше расстояние, тем его труднее разделить пополам, и это становится совершенно нереальным, когда у нас нет способа измерить такое маленькое расстояние. Но, конечно, с помощью моделей все-таки происходит понимание.

Это все загадка, тут никто не понимает, как на самом деле что происходит, а мне чисто эмоционально нравится высказывание Спинозы. Он говорит: «Свобода достигается знанием, а знание достигается духовным единением с природой». Но слово «природа» он отождествлял со словом «бог». В духовном единении с богом. Я думаю, что эта истина достаточно правильная и глубокая. Вот, например, Фарадей. Почему он знал, что существует переход из магнитного поля в электрическое? Никто же не наблюдал. А почему он знал, что существует? Я вот это понимаю как результат духовного единения с природой.

– Как бы слышать музыку ангелов?

– Ну что-то в этом роде. Он уже сделал несколько крупных открытий, у него была хорошо отработанная интуиция, и поэтому он мог, как бог, видеть истину прямо, не с помощью хитроумных рассуждений, а прямо.

– Мы как-то обсуждали, что прямое видение истины важнее умения доказывать теоремы.

– Ну да, конечно.

– Это, кстати, тоже интересный вопрос. Насколько важна, скажем, математическая строгость в школе, при обучении. Если все доказывать очень строго, это же можно...

– Думаю, здесь вот какой компромисс существует. Если я в каком-то месте сослался на очевидность, даже, может быть, не сослался, а умолчал, – умолчал, понимая, что ученики воспримут это как нечто естественное и не вызывающее возражений, – то это может быть честным, а может быть нечестным. Честное – в том случае, если я могу, не разрушая этой структуры, добавить точное рассмотрение, а нечестное – если нужно разрушить эту структуру, чтобы сделать ее точной.

Вот, например, я хочу доказать, что множество точек отрезка несчетно. Допустим, что оно счетное. Берем отрезок длиной единица, перенумеруем эти точки, и точки покрываем интервалами – первую точку интервалом длиной одна десятая, вторую – одна сотая и так далее. Получается, что мы все точки отрезка длины единица покрыли интервалами, сумма длин которых заведомо не больше одной девятой. Это очень понятное рассуждение. Для начинающих оно потрясающе убедительное, хотя оно и нестрогое. Надо доказать еще, что сумма длин этих интервалов, покрывающих отрезок, должна быть больше, чем длина самого отрезка. Но эта неточность честная, потому что это можно доказать. Можно отдельно, на одном занятии доказать эту теорему, и все получается нормально.

Нечестная игра – если ты ссылаешься на очевидность, но замечать это точным рассуждением не удается.

Поэтому учебник Киселева удачный. Там, например, существование перпендикуляра доказывается перегибанием листа бумаги.

– Наглядно, понятно, всем очевидно.

– Да. И все равно там потом правильное доказательство есть.

– В этом смысле меня удивляет очень, например, в школьном учебнике Погорелова по геометрии – нет такой аксиомы, что сумма двух сторон треугольника больше третьей. Это доказывается из некоторых других аксиом, хотя для меня это более понятная и более простая аксиома – что отрезок – это самое короткое расстояние.

– И подход с аксиомой о кратчайшем расстоянии удачен педагогически, потому что все как бы заранее знают, что это так.

Вопросы задавал С.Дориченко

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 2010 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1-2010» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M2161» или «Ф2168». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам [math@kvant.info](mailto:math@kvant.info) и [phys@kvant.info](mailto:phys@kvant.info) соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи M2161, M2162, M2163,а, M2164,а, M2166 и M2167 предлагались на XXXI Турнире городов, задача M2165 – на Всероссийской олимпиаде по геометрии имени И.Ф.Шарыгина.

## Задачи M2161–M2168, Ф2168–Ф2174

**M2161.** 100 пиратов сыграли в карты на золотой песок, а потом каждый посчитал, сколько он в сумме выиграл либо проиграл. У каждого проигравшего хватает золота, чтобы расплатиться. За одну операцию пират может либо раздать всем поровну золота, либо получить с каждого поровну золота. Докажите, что можно за несколько таких операций добиться того, чтобы каждый получил (в сумме) свой выигрыш либо выплатил проигрыш. (Разумеется, общая сумма выигрышей равна сумме проигрышей.)

*Е.Горинов*

**M2162.** Семизначный код, состоящий из семи различных цифр, назовем *хорошим*. Паролем сейфа является хороший код. Известно, что сейф откроется, если введен хороший код и на каком-нибудь месте цифра кода совпала с соответствующей цифрой пароля. За какое наименьшее количество попыток можно с гарантией открыть сейф?

*Д.Баранов*

**M2163.** Найдите все такие натуральные числа  $a$  и  $b$ , что:  
а)  $(a + b^2)(b + a^2)$  является точной степенью двойки;  
б)  $(a + b^3)(b + a^3)$  является точной степенью тройки.

*В.Произволов*

**M2164.** а) На клетчатую плоскость положили 2009 одинаковых квадратов  $n \times n$  клеток. Затем отметили все клетки, которые покрыты нечетным числом квадратов. Докажите, что отмеченных клеток не меньше чем  $n^2$ .

б) На прямоугольный лист бумаги положили 2009 одинаковых единичных квадратов, стороны которых

параллельны краям листа. Затем закрасили все области, которые покрыты нечетным числом квадратов. Докажите, что площадь закрашенной части листа не меньше 1.

*И.Пак, Ю.Рабинович*

**M2165.** К двум окружностям  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , пересекающимся в точках  $A$  и  $B$ , проведена их общая касательная  $CD$  ( $C$  и  $D$  – точки касания соответственно, точка  $B$  ближе к прямой  $CD$ , чем  $A$ ). Прямая, проходящая через  $A$ , вторично пересекает  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно ( $A$  лежит между  $K$  и  $L$ ). Прямые  $KC$  и  $LD$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что прямая  $PB$  симметрична медиане треугольника  $KPL$ , проведенной из вершины  $P$ , относительно биссектрисы угла  $KPL$ .

*Ю.Блинков*

**M2166.** Обозначим через  $[k]!$  произведение  $1 \cdot 11 \cdot 111 \cdot \dots \cdot \underbrace{11\dots11}_k$  – всего  $k$  сомножителей. Докажите, что число  $[n + m]!$  делится на произведение  $[n]! \cdot [m]!$ .

*М.Берштейн*

**M2167\*.** Оля и Максим оплатили путешествие по архипелагу из 2009 островов, где некоторые острова связаны двусторонними маршрутами катера. Они путешествуют, играя. Сначала Оля выбирает остров, на который они прилетают. Затем они путешествуют вместе на катерах, по очереди выбирая остров, на котором еще не были (первый раз выбирает Максим). Кто не сможет выбрать остров, проиграл. Докажите, что при любой схеме маршрутов Оля может выиграть, как бы ни играл Максим.

*Фольклор (предложил А.Шаповалов)*

**M2168\***. Дан четырехугольник  $ABCD$ , вписанный в окружность  $\omega$ . Пусть  $R_1$  – радиус окружности, касающейся отрезков  $AB$ ,  $AD$  и окружности  $\omega$ ,  $R_2$  – радиус окружности, касающейся отрезков  $CB$ ,  $CD$  и окружности  $\omega$ . Проводятся всевозможные дуги окружности  $BD$ , разбивающие четырехугольник на два криволинейных треугольника. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в эти криволинейные треугольники, не зависит от выбора дуги  $BD$  тогда и только тогда, когда  $R_1 = R_2$ .

*А.Заславский*

**Ф2168.** На Венере странная атмосфера – она простирается до высоты 10 км и обладает практически постоянной плотностью. Отпустим мячик с высоты 5 м – он упадет на поверхность через 1 секунду. С высоты 50 м он падает 3,5 с, с высоты 100 м – 5,5 с. Сколько времени он будет падать с высоты 200 м? Оцените, с какой скоростью он движется в этом случае непосредственно перед падением.

*А.Простов*

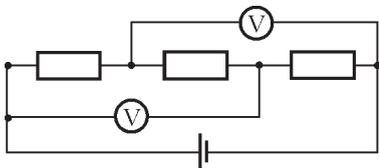
**Ф2169.** На гладком горизонтальном столе находится груз массой  $M$ , к нему привязаны легкие нити, к свободным концам нитей прикреплены грузы массами  $2M$  и  $M/2$ . Нити переброшены через неподвижные, расположенные горизонтально пальцы так, что один кусок каждой нити горизонтален, а другой – вертикален. Вначале груз на плоскости удерживают, затем отпускают. При этом пальцы начинают двигать навстречу друг другу по горизонтали, каждый с ускорением  $a = g/7$ . Найдите ускорение груза массой  $M$  сразу после начала движения.

*Р.Пальцев*

**Ф2170.** В два стакана налили одинаковые количества воды – в первый горячую при  $+70^\circ\text{C}$ , во второй холодную при  $+20^\circ\text{C}$ . Ложку горячей воды перелили в холодную и перемешали. Температура воды в этом стакане оказалась  $+25^\circ\text{C}$ . Перелили ложку этой воды обратно в стакан с горячей водой и перемешали. Какой стала температура в горячем стакане? Сколько раз нужно повторить этот процесс (переливание туда и обратно с перемешиванием), чтобы разность температур в стаканах стала меньше одного градуса? Теплоемкостью стаканов и ложки можно пренебречь. Теплообмен с окружающей средой не учитывать.

*А.Повторов*

**Ф2171.** Три одинаковых резистора соединены последовательно, батарейка напряжением 6 В подключена к концам этой цепочки. Два одинаковых вольтметра подключены так, как показано на рисунке 1. Один из приборов показывает 3 В. Что показывает второй прибор? Что он будет показывать, если первый вообще отключить от схемы? Показания приборов считать точными, вольтметры – неидеальными.



*Рис. 1*

Два одинаковых вольтметра подключены так, как показано на рисунке 1. Один из приборов показывает 3 В. Что показывает второй прибор? Что он будет показывать, если первый вообще отключить от схемы? Показания приборов считать точными, вольтметры – неидеальными.

*З.Приборов*

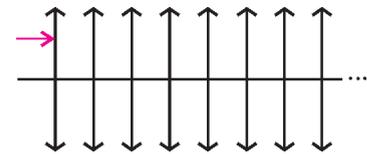
**Ф2172.** В глубинах космоса, вдали от всех других тел, висит неподвижно тонкостенная непроводящая сфера радиусом  $R$  и массой  $M$ . По ее поверхности равномерно «размазан» заряд  $Q$ . Издали на сферу налетает очень маленький шарик массой  $m$ , заряженный таким же зарядом  $Q$ . Начальная скорость шарика равна  $v_0$  и направлена в центр сферы, а в стенках сферы сделаны две маленькие дырки так, чтобы шарик, при большой его скорости, мог проскочить сквозь сферу. Сколько времени шарик летит внутри сферы?

*З.Рафаилов*

**Ф2173.** Пружинный маятник состоит из легкой пружины жесткостью  $k$  и висящего на ней груза массой  $M$ . Вначале система неподвижна (груз в равновесии). В некоторый момент точку подвеса начинают двигать вниз с постоянной скоростью  $v_0$ . Найдите максимальную длину пружины при таком движении. В нерастянутом состоянии пружина имеет длину  $L$ .

*А.Зильберман*

**Ф2174.** Очень большое количество одинаковых тонких собирающих линз с фокусным расстоянием  $F$  расположены на одинаковых расстояниях  $l$  друг от друга так, что главные оптические оси всех линз совпадают. Расстояние  $l$  много меньше фокусного расстояния  $F$ . На первую линзу перпендикулярно ее плоскости падает луч света (рис.2). Постройте дальнейший ход этого луча. Найдите расстояние между точками, в которых луч в третий и в четвертый раз пересекает главную оптическую ось.<sup>1</sup>



*Рис. 2*

*С.Муравьев*

### Решения задач M2139–M2145, Ф2153–Ф2159

**M2139.** Можно ли раскрасить натуральные числа в 2009 цветов так, чтобы каждый цвет встречался бесконечное число раз и не нашлось тройки чисел, покрашенных в три различных цвета, таких что произведение двух из них равно третьему?

**Ответ:** можно. Приведем один из возможных вариантов такой раскраски. Пусть  $p_1 < p_2 < \dots < p_{2008}$  – простые числа. Построим множества  $A_1, A_2, \dots, A_{2009}$  по следующему правилу. В  $A_1$  включим все натуральные числа, делящиеся на  $p_1$ ; в  $A_2$  – все натуральные числа, делящиеся на  $p_2$ , но не делящиеся на  $p_1$ ; в  $A_3$  – все натуральные числа, делящиеся на  $p_3$ , но не делящиеся на  $p_1$  и на  $p_2$ ; ...; в  $A_{2008}$  – все натуральные числа, делящиеся  $p_{2008}$ , но не делящиеся ни на одно из чисел  $p_1, p_2, \dots, p_{2007}$ . Наконец, в  $A_{2009}$  включим все остальные натуральные числа. Тогда для любых чисел  $x \in A_k, y \in A_n$ , где  $k < n$ , их произведение принадлежит множеству  $A_k$ , поэтому

<sup>1</sup> При решении этой задачи советуем ознакомиться с задачей Ф193 из «Задачника «Кванта». (Прим. ред.)

при таком разбиении натуральных чисел на множества не удастся найти разноцветную тройку чисел, произведение двух из которых равно третьему числу.

*Н. Агаханов*

**M2140.** Восемь клеток одной диагонали шахматной доски назовем забором. Ладья ходит по доске, не наступая на одну и ту же клетку дважды и не наступая на клетки забора (промежуточные клетки не считаются посещенными). Какое наибольшее число прыжков через забор может совершить ладья?

**Ответ:** 47 прыжков.

Разделим доску на четыре квадрата  $4 \times 4$ . Заметим, что если ладья прыгает через забор, то либо начальная, либо конечная клетка прыжка закрашена цветом – голубым или розовым – на рисунке 1. Так как закрашенных клеток 24 и через каждую может проходить максимум два прыжка, то всего может оказаться не более 48 прыжков. При этом, если их ровно 48, то из каждой закрашенной клетки должно быть сделано два прыжка в незакрашенные клетки (в предыдущем подсчете прыжок из закрашенной клетки в закрашенную будет подсчитан два раза!). Тогда все

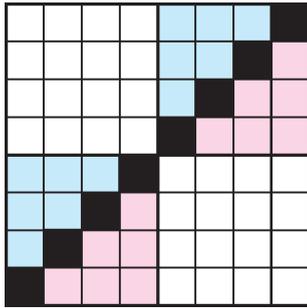
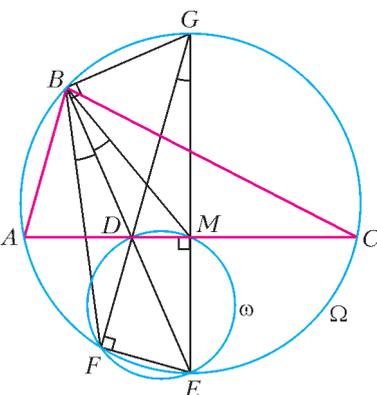


Рис. 1

ходы из голубых клеток будут вести в белый квадрат под диагональю, а от туда – только в голубые клетки (либо в другие клетки этого же квадрата). Значит, подобным образом ладья никогда не попадет в розовые клетки. Противоречие. Таким образом, количество прыжков не превосходит 47.

Один из возможных примеров с 47 прыжками показан на рисунке 2 (числа в клетках указывают, в каком порядке ладья по ним проходит).

*Р. Женодаров*



**M2141.** В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BD$  (точка  $D$  лежит на отрезке  $AC$ ). Прямая  $BD$  пересекает окружность  $\Omega$ , описанную около треугольника  $ABC$ , в точках  $B$  и  $E$ . Окружность  $\omega$ , построенная на отрезке  $DE$  как на диаметре, пересекает окружность  $\Omega$  в точках  $E$  и  $F$ . Докажите,

что прямая, симметричная прямой  $BF$  относительно прямой  $BD$ , содержит медиану треугольника  $ABC$ .

Пусть  $M$  – середина стороны  $AC$  (см. рисунок). Так как дуги  $AE$  и  $CE$  равны, то  $ME$  – серединный перпендикуляр к отрезку  $AC$ . Поскольку  $\angle DME = 90^\circ$ , то  $M$  лежит на окружности  $\omega$ . Пусть прямая  $DF$  пересекает вторично окружность  $\Omega$  в точке  $G$ . Так как  $\angle DFE = 90^\circ$ , то  $G$  – точка, диаметрально противоположная точке  $E$ , в частности  $EG$  проходит через  $M$ . Имеем  $\angle FBE = \angle FGE$ .

Далее, поскольку  $EG$  – диаметр,  $\angle GBE = 90^\circ$ . Из равенств  $\angle GBD = \angle GMD = 90^\circ$  вытекает, что  $GBDM$  – вписанный четырехугольник (в окружность с диаметром  $DG$ ), откуда  $\angle MBE = \angle MBD = \angle MGD = \angle EGF$ . Окончательно,  $\angle FBE = \angle FGE = \angle MBE$ , что и требовалось установить.

*Л. Емельянов, П. Кожевников*

**M2142.** Сколько раз функция

$$f(x) = \cos x \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2009}$$

меняет знак на отрезке  $\left[0; \frac{2009\pi}{2}\right]$ ?

**Ответ:** 75 раз.

Обозначим  $n = 2009$ . Рассмотрим функцию  $\cos \frac{x}{k}$ . Она меняет знак при

$$x = k \left( \pi m + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{k(2m+1)\pi}{2},$$

где  $m$  – произвольное целое число. Значит, нулями функции  $f(x)$  на отрезке  $\left[0; \frac{2009\pi}{2}\right]$  могут являться только точки  $x_i = \frac{\pi i}{2}$ , где  $1 \leq i \leq n$ . Тогда менять знак она может лишь в точках  $x_i$  при  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

Функция  $\cos \frac{x}{k}$  меняет знак в точке  $x_i$ , если  $i = k(2m+1)$  при целом  $m$ . Значит, количество косинусов, которые меняют знак в точке  $x_i$ , совпадает с количеством нечетных делителей числа  $i$ . Поэтому функция  $f(x)$  будет менять знак в тех и только тех точках  $x_i$ , для которых у числа  $i$  нечетное количество нечетных делителей. Представим  $i = 2^l j$ , где  $l$  целое, а  $j$  нечетно. Тогда количество нечетных делителей у чисел  $i$  и  $j$  совпадает. Но у нечетного числа  $j$  количество делителей нечетно тогда и только тогда, когда  $j$  – это точный квадрат (действительно, если  $j$  не квадрат, то все его делители разбиваются на пары  $a$  и  $\frac{j}{a}$ ; если же  $j = s^2$ , то число  $s$  – единственное оставшееся без пары).

В итоге получаем, что функция  $f(x)$  меняет знак в точке  $x_i$ , если число  $i$  – либо квадрат, либо удвоенный квадрат (в зависимости от четности числа  $l$ ). Но среди чисел от 1 до  $n-1$  есть  $\left[\sqrt{n-1}\right]$  квадратов и  $\left[\frac{\sqrt{n-1}}{2}\right]$  удвоенных квадратов. Значит, искомое количество равно  $\left[\sqrt{n-1}\right] + \left[\frac{\sqrt{n-1}}{2}\right] = 44 + 31 = 75$ .

*Замечание.* Выражение «функция  $f(x)$  меняет знак в точке  $x_0$ » не вполне корректно даже в том случае, когда функция  $f(x)$  непрерывна на всей числовой прямой. Например, можно ли сказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

меняет знак в точке  $x_0 = 0$ ? Однако для тригонометрической функции из условия данной задачи подобных трудностей не возникает.

*Б.Трушин*

**M2143.** В королевстве  $N$  городов, некоторые пары которых соединены непересекающимися дорогами с двусторонним движением (города из такой пары называются соседними). При этом известно, что из любого города можно доехать до любого другого, но невозможно, выехав из некоторого города и двигаясь по различным дорогам, вернуться в исходный город. Однажды Король провел такую реформу: каждый из  $N$  мэров городов стал снова мэром одного из  $N$  городов, но, возможно, не того города, в котором он работал до реформы. Оказалось, что любые два мэра, работавшие в соседних городах до реформы, оказались в соседних городах и после реформы. Докажите, что либо найдется город, в котором мэр после реформы не поменялся, либо найдется пара соседних городов, обменявшихся мэрами.

Применим индукцию по  $N$ . Утверждение задачи очевидно при  $N = 1$  и  $N = 2$ . Пусть  $\Gamma_1$  – множество городов, из которых исходит одна дорога, а  $\Gamma$  – множество остальных городов. Начав движение по различным дорогам из некоторого города, согласно условию, мы не сможем попасть дважды в один и тот же город, поэтому когда-нибудь мы закончим движение в городе из множества  $\Gamma_1$ . Это означает, что множество  $\Gamma_1$  непусто. Ясно, что при  $N \geq 3$  множество  $\Gamma$  непусто, и в нем меньше чем  $N$  городов.

Назовем *значимость* мэра количество городов, соседних с городом, где он работает. По условию значимость каждого мэра после реформы не уменьшилась. В частности, мэр города, принадлежащего множеству  $\Gamma$ , после реформы стал мэром некоторого города из множества  $\Gamma$ , т.е. в результате реформы в городах множества  $\Gamma$  тоже произошла перестановка мэров. Ясно, что из любого города  $A \in \Gamma$  можно доехать до любого другого города  $B \in \Gamma$ , не заезжая в города множества  $\Gamma_1$ .

Поэтому множество городов  $\Gamma$  и реформа, рассмотренная только на городах из  $\Gamma$ , удовлетворяет условию задачи. Применив предположение индукции, получаем, что в множестве  $\Gamma$  либо найдется город, в котором мэр после реформы не поменялся, либо найдется пара соседних городов, обменявшихся мэрами, что и требовалось.

*Замечание.* Переформулировка данной задачи на языке теории графов звучит так: «Докажите, что любой автоморфизм дерева имеет неподвижную вершину или неподвижное ребро».

*В.Дольников*

**M2144.** По кругу стоят 100 наперстков. Под одним из них спрятана монетка. За один ход разрешается перевернуть четыре наперстка и проверить, лежит ли под одним из них монетка. После этого их возвращают в исходное положение, а монетка перемещается под один из соседних с ней наперстков. За какое наименьшее число ходов наверняка удастся обнаружить монетку?

**Ответ:** за 33 хода.

После каждого нашего хода и перемещения монетки будем передвигать все наперстки (вместе с монеткой) по ходу часовой стрелки на одну позицию. Тогда будем считать, что после каждого хода монетка либо остается на месте, либо перемещается на две позиции по часовой стрелке, а наперстки остаются на своих местах.

Покрасим все наперстки поочередно в белый и черный цвета и пронумеруем наперстки каждого цвета по порядку против часовой стрелки числами от 0 до 49. Понятно, что цвет наперстка, под которым лежит монетка, не изменяется, а номер либо не изменяется, либо уменьшается на 1 по модулю 50.

Покажем, как найти монетку за 33 хода. Описывая алгоритм, предполагаем, что монетка не обнаружена на всех ходах вплоть до 33-го (в противном случае все уже сделано менее чем за 33 хода). Первым ходом поднимем черные наперстки с номерами 0, 1, 2, 3. Тогда после перемещения монетка не сможет оказаться под черными наперстками 0, 1, 2. Вторым ходом поднимем черные наперстки 3, 4, 5, 6. Тогда после перемещения монетка не сможет оказаться под черными наперстками 0, 1, ..., 5. Действуем так и далее: при  $s = 1, 2, \dots, 16$  ходом номер  $s$  поднимем черные наперстки с номерами  $3s - 3, 3s - 2, 3s - 1, 3s$ . Тогда после перемещения монетка не сможет оказаться под черными наперстками 0, 1, ...,  $3s - 1$ . Семнадцатым ходом поднимем черные наперстки 48 и 49, а также белые наперстки 49 и 0. Теперь мы знаем, что под черными наперстками нет монетки, а также что после перемещения монетка не сможет оказаться под белым наперстком 49. При  $s = 1, 2, \dots, 15$  ходом номер  $17 + s$  поднимем белые наперстки  $3s - 3, 3s - 2, 3s - 1, 3s$ . Тогда после перемещения монетка не сможет оказаться под белыми наперстками 49, 0, 1, ...,  $3s - 1$ . Наконец, последним, 33-м ходом поднимаем белые наперстки 45, 46, 47, 48; под одним из них обязана быть монетка.

Докажем, что с гарантией обнаружить монету за 32 хода невозможно. Обозначим через  $B_k$  множество из четырех наперстков, поднимаемых на  $k$ -м ходе, а через  $A_k$  – множество наперстков, про которые перед выполнением  $k$ -го хода (после возможного перемещения монетки на  $(k - 1)$ -м ходе) точно известно, что под ними нет монетки. Предполагаем, что, пока возможно, под наперстками из  $B_k$  нет монетки. Ясно, что  $A_{k+1} \subset A_k \cup B_k$  при  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ , откуда  $|A_{k+1}| \leq |A_k| + 4$  (здесь и далее через  $|X|$  обозначаем количество элементов в множестве  $X$ ). Более того, если множество  $A_k \cup B_k$  не совпадает с множеством всех наперстков или с множеством из 50 наперстков одного цвета, то найдется такая пара одноцветных наперстков

$P$  и  $Q$  с номерами  $r$  и  $r + 1 \pmod{50}$  соответственно, что  $P \in A_k \cup B_k$ , а  $Q \notin A_k \cup B_k$ . Тогда если перед  $k$ -м ходом монетка находилась под наперстком  $Q$ , то она может переместиться под  $P$ , поэтому  $P \notin A_{k+1}$ . В этом случае  $A_{k+1} \neq A_k \cup B_k$ , и следовательно,  $|A_{k+1}| \leq |A_k| + 3$ . Итак,  $|A_{k+1}| \leq |A_k| + 3$ , если  $|A_{k+1}| \neq 50$ . Имеем:  $|A_1| = 0$ ,  $|A_2| \leq 3$ ,  $|A_3| \leq 6, \dots, |A_{17}| \leq 48, |A_{18}| \leq 51, |A_{19}| \leq 54, \dots, |A_{32}| \leq 93$ . Получается, что перед 32-м ходом имеется по крайней мере 7 наперстков, под которыми может быть монета, следовательно, обнаружить монету с гарантией на 32-м ходу или ранее не удастся.

Б.Трушин

**M2145.** Даны натуральные числа  $x$  и  $y$  из отрезка  $[2; 100]$ . Докажите, что при некотором натуральном  $n$  число  $x^{2^n} + y^{2^n}$  – составное.

Если  $x = y$ , то подходит  $n = 1$ , ибо  $x^2 - y^2$  – четное число, большее 2. Далее мы предполагаем, что  $x \neq y$ . В этом случае мы установим, что при некотором  $n$  число  $x^{2^n} + y^{2^n}$  делится на 257 и не равно 257. Тогда оно будет составным, что и требуется.

Предположим, что  $x^{2^n} + y^{2^n} = 257$ . Пусть  $a = x^{2^{n-1}}$ ,  $b = y^{2^{n-1}}$ . Тогда  $a^2 + b^2 = 257$ , и если  $a \geq b$ , то  $a = 16$ ,  $b = 1$  (случаи  $a = 12, 13, 14, 15$  легко перебираются; если же  $a \leq 11$ , то  $b^2 \leq a^2 < 257/2$ , что невозможно). Но это противоречит условию  $x, y > 1$ . Итак,  $x^{2^n} + y^{2^n} \neq 257$ . Осталось проверить только то, что при некотором  $n$  число  $x^{2^n} + y^{2^n}$  делится на 257.

Поскольку  $y$  не делится на простое число 257, найдется такое натуральное  $q$ , что  $x \equiv qy \pmod{257}$ . Так как  $x \neq y$  и  $0 < x + y < 257$ , получаем, что  $q \not\equiv \pm 1 \pmod{257}$ . Кроме того,  $q \not\equiv 0 \pmod{257}$ , так как  $x$  не делится на 257.

Поскольку число 257 простое, по малой теореме Ферма число

$$q^{256} - 1 = q^{2^8} - 1 = (q - 1)(q + 1)(q^2 + 1)(q^4 + 1) \dots (q^{2^7} + 1)$$

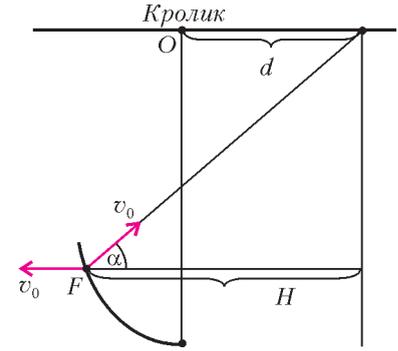
делится на 257. Первые две скобки не делятся на 257, поэтому для некоторого  $n \in \{1, 2, \dots, 7\}$  число  $q^{2^n} + 1$  делится на 257. Но тогда число  $x^{2^n} + y^{2^n} \equiv y^{2^n} (q^{2^n} + 1) \pmod{257}$  также делится на 257.

*Замечание.* Как следует из малой теоремы Ферма, для простого  $p = 4k + 1$  существует ровно одна пара натуральных  $a > b$  такая, что  $a^2 + b^2 = p$ . Это позволяет избежать перебора в середине решения.

С.Берлов, А.Белов

**Ф2153.** По прямой дороге с постоянной скоростью  $v_0$  бежит кролик. На расстоянии  $L$  от дороги находится лиса. В тот момент, когда кролик находится ближе всего к лисе, она его замечает и бросается в погоню. Скорость лисы такая же, как у кролика, но лиса бежит с «упреждением» – вектор скорости лисы направлен все время в точку, которая находится

впереди кролика на расстоянии  $d$  от него. Найдите минимальное расстояние между участниками забега.



Перейдем в систему отсчета, которая движется вдоль дороги со скоростью  $v_0$  («сядем на кролика»). Пусть в данный момент лиса находится в точке  $F$  (см. рисунок). Обозначим  $OF = l$ . За малый промежуток времени  $\Delta t$

$$\Delta l = -(v_0 - v_0 \cos \alpha) \Delta t,$$

$$\Delta H = (v_0 - v_0 \cos \alpha) \Delta t.$$

Видно, что  $\Delta l + \Delta H = 0$ , тогда  $l + H = \text{const}$ . Для начального момента

$$l_{\text{нач}} + H_{\text{нач}} = \sqrt{L^2 + d^2} + d.$$

Тогда

$$l = \sqrt{L^2 + d^2} + d - H.$$

Ясно, что расстояние  $l$  будет минимальным при максимальном  $H$ . Через дорогу лиса перебежать не может, так как ее скорость «по направлению к дороге» при приближении к дороге становится нулевой. Максимальное значение величины  $H$  будет при положении лисы в непосредственной близости к дороге, при этом  $H = l$ , и

$$l_{\min} = \frac{\sqrt{L^2 + d^2} + d}{2}.$$

З.Рафаилов

**Ф2154.** На гладком горизонтальном столе покоится монета, другая такая же монета скользит по столу. После абсолютно упругого удара скорости монет оказались одинаковыми по величине. Найдите угол разлета монет.

В условии задачи есть «подвох», но о нем – чуть позже.

При условии  $u_1 = u_2 = u$  (см. рисунок) и углы должны быть одинаковыми:  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ . Тогда, в соответствии с законами сохранения импульса и энергии,

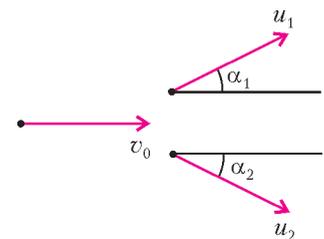
$$2u \cos \alpha = v_0 \text{ и } 2u^2 = v_0^2.$$

Отсюда

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha = 45^\circ.$$

Таким образом, угол разлета равен  $2\alpha = 90^\circ$ .

Подвох в том, что условие равенства скоростей монет после их разлета вовсе не требуется (отношение скоростей может быть каким угодно – в зависимости от «геометрии» удара), а угол разлета все равно получится  $90^\circ$ . Покажем это.



Обозначим импульсы монет  $\vec{p}_0$ ,  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$ . Тогда, согласно закону сохранения импульса,

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2.$$

Это означает, что импульсы (векторы) образуют треугольник. Из закона сохранения энергии следует

$$\frac{p_0^2}{2m} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m},$$

или

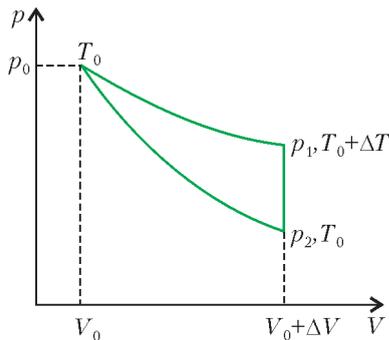
$$p_0^2 = p_1^2 + p_2^2.$$

Таким образом, треугольник получается прямоугольным.

А.Простов

**Ф2155.** Моль гелия находится в сосуде под поршнем при нормальных условиях. С газом проводят замкнутый процесс. В первой части процесса газ расширяется, при этом теплоемкость его остается постоянной и равной  $C = 100$  Дж/К, затем газ охлаждают до начальной температуры при неизменном объеме и, наконец, изотермически сжимают до начального объема. В первой части процесса газ получил количество теплоты  $Q = 1$  Дж. Найдите работу газа в этом процессе.

Переданная порция тепла очень мала, цикл на  $p$ - $V$ -диаграмме (см. рисунок) очень похож на крошечный



треугольник. Мы будем вычислять площадь этой фигуры – работу в цикле, – пренебрегая кривизной сторон этого «треугольника».

Изменение температуры в первой части процесса равно

$$\Delta T = \frac{Q}{C} = 0,01 \text{ К}.$$

На этом участке

$$Q = A + \Delta U, \text{ или } Q = p_0 \Delta V + C_V \Delta T,$$

откуда

$$\Delta V = \frac{Q - C_V \Delta T}{p_0} \approx 9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Площадь треугольника – работа в цикле – равна

$$A = \frac{1}{2} (p_1 - p_2) \Delta V.$$

Изменение объема  $\Delta V$  мы уже знаем, а разность

давлений  $p_1 - p_2$  найдем из следующих соотношений:

$$p_2 = p_0 \frac{V_0}{V_0 + \Delta V} \approx p_0 \left( 1 - \frac{\Delta V}{V_0} \right);$$

$$p_0 V_0 = RT_0, \quad p_1 (V_0 + \Delta V) = R(T_0 + \Delta T),$$

$$\text{откуда } p_1 = p_0 \left( 1 - \frac{\Delta V}{V_0} + \frac{\Delta T}{T_0} \right);$$

$$p_1 - p_2 = p_0 \frac{\Delta T}{T_0} \approx 3,7 \text{ Па}.$$

Окончательно,

$$A \approx \frac{1}{2} \cdot 3,7 \cdot 9 \cdot 10^{-6} \text{ Дж} \approx 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}.$$

А.Теплов

**Ф2156.** Производят расчет «атома водорода», в котором минимальное расстояние между протоном и электроном составляет  $d = 1$  мкм, а максимальное в 3 раза больше. Какой будет максимальная скорость электрона в таком «атоме»?

При минимальном расстоянии между ядром (протоном) и электроном скорость электрона максимальна, а при максимальном расстоянии – минимальна, причем она меньше максимальной в 3 раза (можно сослаться на второй закон Кеплера – не зря ведь школьникам говорят про планетарную модель атома, а можно применить и закон сохранения момента импульса). Тогда из закона сохранения энергии получим

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{kq^2}{d} = \frac{m(v/3)^2}{2} - \frac{kq^2}{3d}.$$

Отсюда найдем максимальную скорость  $v$  электрона:

$$v = \sqrt{\frac{3kq^2}{2dm}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 9 \cdot 10^9 (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{2 \cdot 10^{-6} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}} \text{ м/с} \approx 20 \text{ км/с}.$$

Конечно, это относится только к описанному в условии «атому».

Р.Александров

**Ф2157.** Коаксиальный кабель состоит из центральной жилы диаметром  $d = 1$  мм и проводящей оплетки диаметра  $D = 5$  мм. Пространство между жилой и оплеткой заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 3$ . Найдите емкость и индуктивность в расчете на 1 м для такого кабеля, а также величину волнового сопротивления – при подключении резистора такой величины к концу куска кабеля не происходит отражения электромагнитной волны, бегущей вдоль него.

Найдем емкость кабеля – точнее, куска длиной  $l$  очень длинного кабеля. Зарядим центральную проводящую жилу и оплетку равными по величине и противоположными по знаку зарядами  $q = \rho l$  и  $-q$ , где  $\rho$  – линейная плотность заряда. Напряженность поля в диэлектрике на расстоянии  $x$  от оси равна

$$E(x) = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0\epsilon x}.$$

Разность потенциалов равна

$$\Delta\phi = \int_{d/2}^{D/2} E(x)dx = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{D}{d}.$$

Емкость «на 1 м длины» составляет

$$C = \frac{q}{\Delta\phi} = \frac{\rho l}{\Delta\phi} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln \frac{D}{d}} = \frac{6,28 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 1}{1,61} \text{ Ф} \approx 1 \cdot 10^{-10} \text{ Ф}.$$

Индуктивность «на 1 м длины» посчитаем немного иначе – найдем магнитную индукцию в зазоре, вычислим энергию магнитного поля и приравняем ее известному выражению  $W = \frac{1}{2} LI^2$ . Итак, пусть по проводящей жиле течет ток  $I$ , а по оплетке – такой же ток в противоположном направлении. Тогда магнитное поле снаружи будет нулевым, а в зазоре на расстоянии  $x$  от оси (как поле бесконечного прямого провода) равным

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}.$$

Возьмем тонкий цилиндрический слой – радиус его  $x$ , толщина  $\Delta x$ , длина  $l$ . Энергия магнитного поля в выделенном объеме равна

$$\Delta W = \frac{B^2}{2\mu_0} \Delta V = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \right)^2 (2\pi x \Delta x l).$$

Запишем энергию во всем зазоре длиной  $l$  в виде интеграла:

$$W = \int_{d/2}^{D/2} \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi x} dx = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{D}{d}.$$

Тогда индуктивность «на 1 м длины» будет равна

$$L = \frac{2W}{I^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{D}{d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 1,61}{2\pi} \text{ Гн} \approx 3,2 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}.$$

Теперь можно представить кабель в виде бесконечной LC-цепи (см. рисунок), состоящей из одинаковых звеньев – кусков по 1 м, – причем  $L$  и  $C$  мы уже вычислили. Волновое сопротивление такой цепи равно

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} \approx 55 \text{ Ом}.$$

Получилось активное сопротивление – без реактивной составляющей. Кстати, если бы мы взяли куски другой длины (не слишком длинные!), то получили бы тот же ответ.

Описанный в задаче кабель почти такой же, как и обычный 50-омный кабель, используемый при передаче сигналов не слишком больших частот – единицы, десятки, даже сотни мегагерц.

А.Сложнов

**Ф2158.** Конденсатор емкостью  $C = 10 \text{ мкФ}$ , катушка индуктивностью  $L = 1 \text{ Гн}$  и резистор сопротивлением  $R = 300 \text{ Ом}$  соединены «звездой», а свободные выводы подключены к трем фазам сети напряжением  $U = 220 \text{ В}$  и частотой  $f = 50 \text{ Гц}$ . Найдите напряжение в общей точке элементов по отношению к «нулевому» проводу.

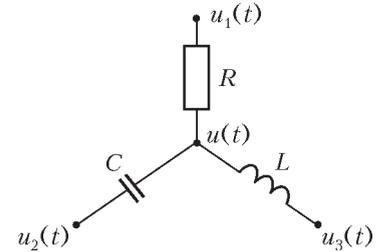


Рис. 1

Введем обозначения для напряжений точек схемы по отношению к «нулевому» проводу (рис.1):  $u(t)$  – напряжение в общей точке,  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  и  $u_3(t)$  – напряжения фаз сети. Емкостное сопротивление равно

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = 318 \text{ Ом},$$

индуктивное сопротивление составляет

$$X_L = 2\pi f L = 314 \text{ Ом}.$$

Для упрощения вычислений будем считать  $X_C \approx X_L \approx R$  (можно посчитать и точно – но данные в условии явно округлены, излишняя точность нежелательна, и наше приближение выглядит вполне разумным). Сумма токов, втекающих в узел – общую точку, – должна быть нулевой:

$$\frac{u_1(t) - u(t)}{R} + \frac{u_2(t) - u(t)}{X_C} + \frac{u_3(t) - u(t)}{X_L} = 0.$$

Считая  $X_L = X_C = X$  и учитывая, что из-за противоположности сдвигов фаз между напряжением и током в катушке и конденсаторе  $\frac{1}{X_L} = -\frac{1}{X_C}$ , получим

$$u(t) \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{X_C} + \frac{1}{X_L} \right) = \frac{u_1(t)}{R} + \frac{u_2(t)}{X_C} + \frac{u_3(t)}{X_L},$$

или

$$u(t) = u_1(t) + \frac{R}{X} (u_2(t) - u_3(t)).$$

Нарисуем векторную диаграмму для эффективных значений напряжений трехфазной сети (рис.2). Вектор, изображающий разность напряжений  $u_2 - u_3$ , перпендикулярен вектору, изображающему напряжение  $u_1$ , следовательно,

$$u_2 - u_3 = \sqrt{3}u_1.$$

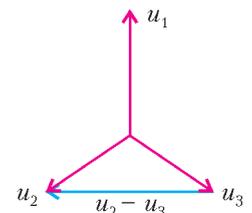


Рис. 2

С учетом сдвигов фаз на  $\pi/2$  полу-

чим: слагаемое  $\frac{R}{X}(u_2 - u_3)$  либо просто добавляется к  $u_1$ , тогда  $u = 220(\sqrt{3} + 1) \text{ В} \approx 600 \text{ В}$  и совпадает с  $u_1$  по фазе, либо вычитается из  $u_1$ , тогда  $u = 220(1 - \sqrt{3}) \text{ В} \approx -160 \text{ В}$  и противофазно ему.

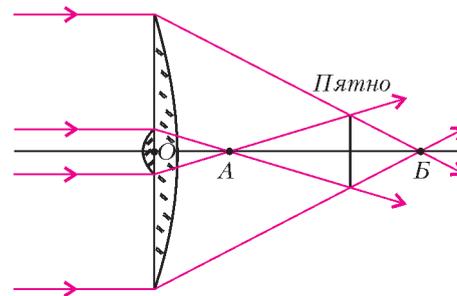
А.Зильберман

**Ф2159.** Экран освещен удаленным источником света. На пути светового пучка располагают линзу, склеенную из двух плосковыпуклых стеклянных линз. Диаметр первой линзы  $D_1 = 5$  см, ее фокусное расстояние  $F_1 = 20$  см, диаметр второй  $D_2 = 1$  см, ее фокусное расстояние  $F_2 = 10$  см. Линзы склеены плоскими поверхностями, плоскость склейки параллельна плоскости экрана, главные оптические оси линз совпадают. На каком расстоянии от экрана нужно расположить эту линзу, чтобы на экране получилось яркое пятно минимального диаметра? Во сколько раз освещенность в центре этого пятна больше освещенности экрана без линзы?

Будем считать линзы тонкими. Тогда (см. рисунок)

$$OB = F_1 = 20 \text{ см}, \quad OA = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} = \frac{20}{3} \text{ см}.$$

Простые геометрические расчеты дают расстояние от



линзы до экрана (пятна) равным 15 см, а диаметр пятна равным 1,25 см.

Из чертежа видно, что в центр пятна попадают лучи, прошедшие через обе линзы. Диаметр пятна в 1,25 раз больше диаметра малой линзы, тогда освещенность в центре пятна в  $(1,25)^2$  раз меньше и составляет 0,64 от освещенности экрана без линзы.

З.Рафаилов

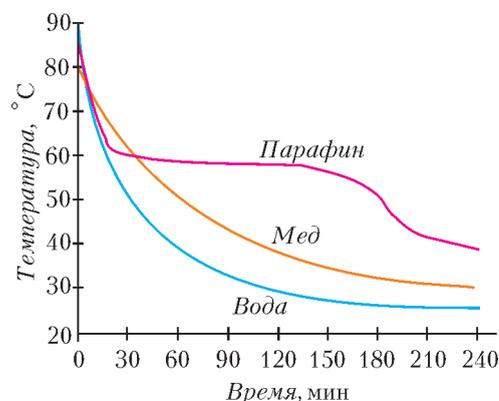
## ПРОГУЛКИ С ФИЗИКОЙ

### Пока горит свеча... или кристалл

(Начало см. на 4-й странице обложки)

Обычно свечи делают из парафина – высокомолекулярного химического соединения, состоящего из атомов углерода и водорода и имеющего формулу  $C_n H_{2n+2}$ . Простейший парафин ( $n = 1$ ) – это газообразный метан  $CH_4$ . При увеличении  $n$  длина молекулы увеличивается, и парафины становятся сначала жидкостями, например октан  $C_8 H_{18}$ , а потом (начиная с  $n = 20$ ) – и твердыми телами.

Из справочников можно узнать, что твердые парафины являются кристаллическими телами. Известно, что для кристаллов, в отличие от аморфных тел, характерна определенная температура плавления. Попробуйте поставить простой опыт, чтобы доказать кристаллическую природу парафина. Возьмите свечку, натрите ее на терке и заполните этой парафиновой крупой небольшой алюминиевый стакан. Поставьте стакан на конфорку плиты или на дно кастрюли с кипящей водой. Через несколько минут парафиновая крупа начнет плавиться и скоро превратится в жидкий парафин. Желательно, чтобы толщина слоя жидкого парафина в стакане составляла около 5 см, а диаметр стакана был как можно меньше, иначе охлаждение парафина может затянуться на многие часы. Для непрерывной регистрации температуры остывающего парафина вам понадобится термометр, градуированный в диапазоне от 0 до 100 °С. Так как длина такого термометра обычно около 30 см, держатель для него можно изготовить, например, из стопки книг такой же высоты, линейки и липкой ленты. Необходимо, чтобы кончик термометра находился на глубине не менее 3 см (не касаясь дна стакана), а его положение не изменялось со временем. Имейте в виду, что при застывании объем парафина уменьшается на 10–15%, при этом в центре стакана образуется довольно глубокая лунка. Опыт надо проводить в закрытом помещении и вдали от воздушных потоков. Расплавленный парафин в стакане следует осторожно поставить на стол, погрузить в него термометр и сразу же начать измерения с интервалом в 1 минуту. Со временем, когда скорость изменения температуры уменьшится, интервал можно увеличить до 2, 5 и 10 минут.



На рисунке показано, как изменяется температура 158 г парафина при его охлаждении. Видно, что температура парафина сначала резко падает, уменьшаясь от 85 до 60 °С за 15 минут, затем в течение двух часов остается практически постоянной, а потом опять начинает уменьшаться. Такая задержка в изменении температуры говорит о переходе жидкого парафина в кристаллическое состояние. Для сравнения на том же рисунке приведены графики остывания воды и меда, взятых в тех же объемах и при тех же условиях, что и парафин. Эти графики наглядно показывают, что мед и вода остывают постепенно, без временной задержки.

Попробуем, сравнивая графики остывания воды, меда и парафина, оценить удельную теплоту плавления парафина. Парафин затвердевает в диапазоне температур от 62 до 58 °С. В том же диапазоне температур вода остывает со скоростью  $r_B = 10$  °С / мин. Если пренебречь испарением воды и теплоемкостью стакана, то количество теплоты, теряемое водой каждую минуту, составляет  $q_B = m_B c_B r_B$ , где  $m_B$  – масса воды в стакане (200 г), а  $c_B$  – удельная теплоемкость воды (4200 Дж/(кг · °С)). Это тепло через стенки стакана передается окружающей среде. Если не учитывать процесс конвекции внутри стакана, то количество теплоты, отбираемое у металлического стакана, будет зави-

(Продолжение см. на с. 60)

*Ибо наличное все непременно быть чем-нибудь должно,*

*Будь оно иль велико, или самых ничтожных размеров...*

Тит Лукреций Кар

*Около двух миллионов молекул водорода, положенных в ряд, заняли бы миллиметр, и около 200 миллионов миллионов их весили бы один миллиграмм. Числа эти нужно рассматривать как весьма грубые приближения; они по мере усовершенствования науки будут исправлены более разнообразными и точными опытами...*

Джеймс Клерк Максвелл

*Эмульсия – это атмосфера в миниатюре, тяготеющая к земле. В масштабе такой атмосферы высота Альп представилась бы несколькими микронами, а отдельные холмы стали бы равны молекулам.*

Жан Батист Перрен

*Нано (от греч. *nápos* – карлик) – приставка для образования наименования дольных единиц, равных одной миллиардной доле исходных единиц.*

Большой энциклопедический словарь

## А так ли хорошо знакомо вам нано...?

Вообще говоря, следовало бы ответить «конечно, да, и довольно давно» – ведь даже наш далекий предок, вымазавшись в саже, уже имел дело с содержащимися в ней наночастицами углерода. Сталкивались с подобными «крошками», причем наверняка более осознанно, и ученые, занимавшиеся тонкими порошками и коллоидными растворами. Но мало кто представлял, какие поразительные изменения в физических свойствах объектов могут происходить при их уменьшении до наноразмеров. Обнаружить эти перемены удалось совсем недавно с появлением наноприборов – особых, совершенно не похожих на привычные приборов, способных новые свойства измерять и исследовать.

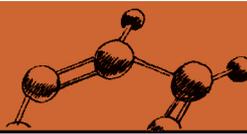
Переход к таким масштабам повлек за собой открытие крайне нетрадиционного поведения частиц, проявляющего закономерности квантовой физики. А это, в свою очередь, породило новые отрасли знаний и технологий, построенные на принципиально иной, чем прежде, идеологии и на иных подходах, – наноэлектронику, наномедицину, нанофотонику, наноэнергетику... далее везде. Приставка с «карликовым» окрасом скрывает в себе целый кладезь огромных резервов, овладение которыми, как прогнозируют ученые, в весьма близком будущем преобразит весь окружающий нас мир и поможет человечеству справиться с множеством накопившихся цивилизацией проблем.

С этими перспективами вы можете ознакомиться и в публикациях нашего журнала – их внушительный список приводится, как обычно, в конце выпуска.

А пока, откликаясь на призыв Р.Фейнмана, написавшего ровно полвека назад статью «Внизу полностью места. Приглашение в новый мир физики», направимся на поиски нанообъектов, во множестве обитающих и вокруг нас, и, конечно же, в школьном курсе физики. Думается, их прямое или косвенное обнаружение поможет вам лучше подготовиться к постижению такой заманчивой нанонауки, таящей в себе мегавозможности.

### Вопрос и задачи

1. Можно ли видеть невооруженным глазом одну десятиллионную долю грамма (т.е. 100 нанограмм) вещества?
2. Очень точное взвешивание можно произвести с погрешностью в 10 нанограмм. Сколько атомов содержится в крупинке железа массой 10 нанограмм?
3. Как оценить размеры молекул воды и спирта?
4. Если соединить 50 миллилитров воды и 50 миллилитров спирта, то объем раствора окажется меньше 100 миллилитров. Почему?
5. Оцените, во сколько раз среднее расстояние между молекулами водорода при нормальных условиях больше поперечника самой молекулы.
6. Почему при уменьшении плотности воздуха электрический разряд происходит при более низких напряжениях?
7. Чем объяснить, что вода, находящаяся в глиняном сосуде, имеет температуру ниже температуры окружающего воздуха? При каких условиях температура воды в этом сосуде будет такой же, как и окружающего воздуха?
8. В чайнике кипит вода, и мы видим выходящий из носика чайника водяной пар. Так ли это?
9. Сосуд разделен на две секции пористой перегородкой. В одной секции находится газ, состоящий из легких молекул, в другой – из тяжелых. Давления газов в начальный момент одинаковы. Через некоторое время давление в той секции сосуда, где находились тяжелые молекулы, увеличилось. Затем, через более длительный промежуток времени, давления в обеих секциях сосуда выровнялись. Как это объяснить?
10. Почему броуновские частицы должны быть относительно малыми?
11. Чтобы разорвать кусок проволоки, требуются значительные усилия. Однако если раскалить проволоку в пламени горелки, то разорвать ее намного легче. Почему?



12. Слепить фигурку из сухого песка нельзя, а из мокрого можно. Почему?

13. С помощью паяльника нельзя расплавить медные или стальные провода. Отчего же тогда удастся надежно соединить пайкой эти провода друг с другом?

14. Опытный стекольник, после того как проведет алмазом по стеклу, смачивает царапину водой, а уже затем ломает лист. Для чего производится смачивание?

15. Известно, что в холодную погоду для растопки вместо дров используют обыкновенные красные кирпичи, вымоченные в бензине. На чем основан этот способ обогрева?

16. Если мыльную пленку расположить вертикально, то цветные полосы на ней будут со временем смещаться вниз, меняя свою ширину, а вскоре в верхней части пленки возникнет быстро увеличивающееся темное пятно, после чего пленка разорвется. Как это объяснить?

### Микроопыт

Нагрейте в пламени спиртовки лезвие безопасной бритвы. Вы сможете увидеть на поверхности металла так называемые цвета побежалости – меняющуюся радужную окраску. В чем причина ее появления?

### Любопытно, что...

...прочные сабли и клинки из дамасской стали научились делать еще в средние века. А вот тайна изготовления такой стали открылась совсем недавно, когда анализ ее структуры позволил обнаружить в ней углеродные нанотрубки – гигантские цилиндрические молекулы из атомов углерода, придающие материалам уникальные упругость и твердость.

...в отличие от природных алмазов, искусственно созданные наноалмазы обладают рядом особенных свойств. Так, у их наночастиц значительно выше поверхностная активность и реакционная способность (у них больше удельная поверхность). Поэтому наноалмазы ныне используют и в биологии, и в медицине в качестве адсорбентов токсичных соединений и носителей препаратов для лечебных целей.

...золото давно научились расплющивать в листки толщиной 100 нанометров, а химической обработкой доводить до толщины 10 нанометров. Однако до размеров самих атомов добраться таким образом было невозможно. И лишь с появлением электронного микроскопа с разрешением 0,12 нанометра удалось при увеличении в семь миллионов раз «увидеть» ряды атомов в кристалле золота, находящихся друг от друга на расстоянии 0,235 нанометра.

...история приготовления коллоидных растворов золота, меняющих цвет от оранжевого до зеленого, или добавления в расплавленное стекло соединений золота, придающих ему яркий красный цвет («золотой рубин»), берет начало в далеком прошлом. О применении «растворимого золота» в медицине упоминал и знаменитый врач XVI века Парацельс. Однако лишь в 1857 году Фарадей доказал, что яркая окраска коллоидных растворов золота обусловлена мелкими взвешенными его частичками. Это и было нанозолото, совершенно не похожее по своим свойствам на золото обычное.

...возможно, самый острый объект, созданный природой, это жало осы – радиус закругления его острия не превышает 10 нанометров.

...в своем знаменитом опыте по определению размеров молекул лорд Рэлей поступил удивительно простым способом. Капая масло в таз с водой, Рэлей бросал туда пыльцу камфоры. Зная, что на поверхности воды частички камфоры совершают беспорядочное движение, а на поверхности масла они спокойны, он подбирал массу масляной капли такой, что закрывал ею всю поверхность воды и добивался прекращения «плясок» пыльцы. Это и было свидетельством того, что масло растеклось мономолекулярным слоем, толщина которого, а значит и размер молекул масла, не превышала 1,7 нанометра.

...суперинвар – сплав железа и никеля с добавкой хрома – обладает необычайно малым коэффициентом теплового расширения. Так, при повышении температуры на один градус метровый стержень из суперинвара удлинится лишь на 30 нанометров.

...электрическая емкость электролитических конденсаторов может быть очень большой за счет малого расстояния между их обкладками, определяемого химической пленкой толщиной в несколько нанометров.

...мембранные технологии, применяемые для получения полупроницаемых пленок, не так давно пополнились еще одним методом. Ускоренные тяжелые ядра облучают синтетические пленки и превращают их в «сита» с аккуратными отверстиями, размер которых можно регулировать в нанодиапазоне.

...так называемые живые молекулярные машины – жгутики бактерий или элементарные мышечные звенья, обеспечивающие целенаправленное движение клеток и перенос молекул через мембраны, – обладают характерными размерами в единицы или десятки нанометров. А диаметр двойной спирали молекулы ДНК составляет около двух нанометров, длина же ее вдоль контура – порядка 400 нанометров.

...приставка «нано» получила столь широкое распространение, что стала использоваться для описания объектов и макроскопических масштабов. Так, в соответствии с европейской классификацией малых спутников, аппараты массой от одного до десяти килограмм получили название «наноспутники».

### Что читать в «Кванте» о нано...

(публикации последних лет)

1. «Нанотехнология на службе человека» – 2005, №4, с.11;
2. «Нанотехнологии: когда размер имеет значение» – 2008, №3, с.6;
3. «На пути к квантовому компьютеру» – 2009, №1, с.2;
4. «Рассказы о современной механике» – 2009, №3, с.2;
5. «Линейка длиной в один нанометр» – 2009, №4, с.2;
6. «Почему углеродные нанотрубки прочнее стали?» – 2009, №4, с.7;
7. «Космический нанолифт» – 2009, №5, с.11;
8. «Измеряем прочность тел от нано до мега» – 2009, №6, с.3;
9. «Как управлять светом с помощью магнитного поля» – 2010, №1, с.12.

Материал подготовил А.Леонovich



# Задачи

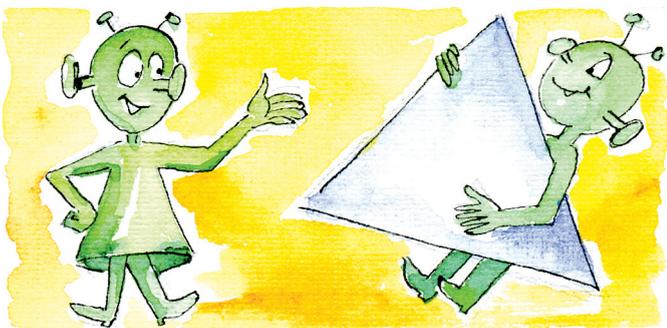
1. По результатам опроса общественного мнения, работой президента довольны 76% опрошенных, работой премьера — 83%, работой правительства в целом — только 59%. Назовем опрошенного безнадежным, если он доволен и работой президента, и работой премьера, но недоволен работой правительства в целом. Какая наименьшая доля безнадежных могла быть среди опрошенных?

*М.Ахмеджанова*



2. Дан равносторонний треугольник.  
а) Можно ли разрезать его на равносторонние треугольники двух видов — большие и маленькие — так, чтобы тех и других треугольников было поровну?  
б) А можно ли разрезать его на равносторонние треугольники трех видов — большие, средние и маленькие — так, чтобы треугольников каждого размера было поровну?

*С.Дворянинов*



3. Однажды Алиса нашла в Зазеркалье волшебную палочку, которая создает любой предмет по Алисиному желанию, но только в одном экземпляре. При этом, создав однажды какой-то предмет, волшебная палочка не сможет в дальнейшем создать такой же предмет вторично. Алисе нужно изготовить 10 одинаковых башмачков для своих путешествий по Зазеркалью. Как

*Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 — 8 классов.*



ей сделать это с помощью найденной волшебной палочки?

*Г.Гальперин*

4. Имеется проволока в виде окружности. Как ее изогнуть, чтобы при проекции на одну плоскость она давала квадрат, а при проекции на другую плоскость — равносторонний треугольник?

*А.Жуков*



5. Врач сообщил Змею Горынычу, что если Змей будет выкуривать по 6 сигарет в день, то помрет через 10 лет, а если — по 17, то — через 5 лет. Сколько лет проживет Змей Горыныч, если бросит курить? (Считаем, что все годы одинаковой длины, а каждая сигарета сокращает жизнь на одно и то же время.)

*А.Ковальджи*



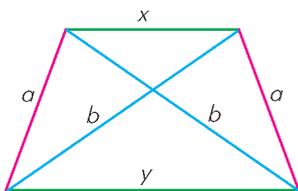
*Иллюстрации Д.Гришуковой*

# Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы завершаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64–А, «Квант» или по электронному адресу: math@kvant.info (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

**16.** Дана равнобокая трапеция с боковыми сторонами длины  $a$  и диагоналями длины  $b$ . Найдите произведение длин ее оснований.



П.Кожевников

$x \cdot y = ?$

**17.** Бильярдный шар выпустили из вершины  $A$  квадратного стола  $ABCD$ . Он отражается от бортов по закону «угол падения равен углу отражения».

Известно, что никакие два удара подряд не пришлись на противоположные борта, причем первый удар был от борта  $BC$ . После 2010 ударов от бортов шар наконец попал в вершину стола. В какую?

Г.Гальперин

**18.** В каждой клетке бесконечной клетчатой плоскости со стороны клетки 1 записано по числу. Если центры трех клеток образуют треугольник со сторонами 3, 4, 5, то числа, записанные в этих клетках, дают в сумме ноль. Обязательно ли тогда во всех клетках записаны нули?

А.Эвнин

**19.** Пусть  $a < b < c$  – наименьшие возможные составные числа, идущие в порядке возрастания, каждое из которых не делится ни на одно из целых чисел от 2 до 100 включительно. Докажите, что произведение  $abc$  – точный куб натурального числа.

Г.Гальперин

**20.** В некоторой конторе 25 кабинетов, занумерованных числами от 1 до 25. У коменданта 25 ключей с номерами от 1 до 25. Каждый ключ открывает кабинет с таким же номером. Но некоторые ключи могут открывать не только один кабинет, и из того, что ключ  $N$  открывает кабинет  $M$ , не следует, что ключ  $M$  открывает кабинет  $N$ .

Контору продали, двери покрасили (номера не видны). Новый комендант со старой связкой ключей стал открывать кабинеты. Открыв кабинет, он оставляет ключ в двери и идет дальше, к уже открытым кабинетам не возвращается. Может случиться, что некоторые кабинеты ему не удастся открыть. Сколько таких кабинетов будет в самом плохом случае? (Укажите возможное число и докажите, что больше быть не может.)

Н.Константинов

## Иррациональность корней из 2, 3, 5 и 6

А. СПИВАК

Число  $\sqrt{2}$  – КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ ИЗ 2 – ЭТО, ПО определению, сторона квадрата площади 2. Другими словами,  $\sqrt{2}$  – это такое положительное число, которое при умножении на себя дает 2.

Легенда приписывает одному из пифагорейцев доказательство иррациональности числа  $\sqrt{2}$ . (Рациональное число  $a/b$  – это частное от деления целого числа  $a$  на натуральное число  $b$ . Доказать иррациональность

$\sqrt{2}$  – значит привести к противоречию равенство  $2 = a^2/b^2$ , где  $a$  и  $b$  – натуральные числа.) Вот это доказательство.

Если  $2b^2 = a^2$ , то число  $a^2$  четное. Поскольку квадрат любого нечетного числа нечетен, то и само число  $a$  обязательно четное, т.е.  $a = 2c$ , где  $c$  – натуральное число. Значит,

$$2b^2 = (2c)^2 = 4c^2,$$

откуда  $b^2 = 2c^2$ . Теперь четным числом должно быть число  $b$ , т.е.  $b = 2d$ , где  $d$  – натуральное число. Лыко да мочало, начинай сначала:

$$(2d)^2 = 2c^2,$$

т.е.  $2d^2 = c^2$ , и так будет всегда: числа делятся и делятся пополам. Очевидно, деля все время пополам, невозможно вечно оставаться во множестве натуральных чисел. Значит, число  $\sqrt{2}$  воистину иррационально.

Примененный нами метод доказательства называют методом бесконечного спуска. (Можно было оформить то же по сути доказательство чуть иначе, сразу рассмотрев не любую дробь  $a/b$ , квадрат которой равен 2, а дробь *несократимую*.)

Говорят, что пифагорейцы скрывали это открытие от простолюдинов, поскольку оно противоречило их религиозному убеждению, что все на свете можно выразить при помощи целых чисел и их отношений – рациональных чисел.

Так оно было на самом деле или нет, подтвердить или опровергнуть не могу. Гораздо интереснее, что не так давно, в 2006 году, Дж. Конвей опубликовал придуманное в 1950-х годах Стенли Тенненбаумом удивительное

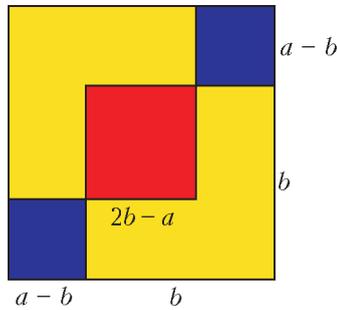


Рис. 1

геометрическое доказательство иррациональности числа  $\sqrt{2}$ . Если  $a^2 = 2b^2$ , впишем в два противоположных угла квадрата  $a \times a$  по квадрату  $b \times b$  (рис.1). Поскольку сумма площадей этих двух квадратов равна площади большого квадрата, то перекрываются они в точности по той же площади (красной на рисунке), какую они не покрывают: сумма площадей двух синих квадратов равна площади красного квадрата!

Таким образом, из квадрата, площадь которого равна удвоенной площади другого квадрата, мы получили квадрат – по-прежнему с целыми сторонами, заметьте! – меньшего размера, площадь которого тоже равна удвоенной площади некоторого квадрата с целыми сторонами. Так можно уменьшать и уменьшать размеры, пока не приходим к квадрату, сторона которого меньше 1. Поскольку натуральное число не может быть меньше 1, желанное противоречие получено: иррациональность числа  $\sqrt{2}$  доказана геометрически!

Конечно, можно было алгебраически от равенства  $a^2 = 2b^2$  перейти к равенству  $(2b - a)^2 = 2(a - b)^2$  (раскройте скобки – убедитесь!) и так совершить шаг спуска (ведь  $2b - a < a$ , поскольку  $a > b$ ).

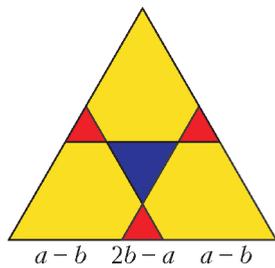


Рис. 2

Однако согласитесь: доказательство без формул симпатичнее.

Аналогично можно доказать и иррациональность числа  $\sqrt{3}$  (рис.2): предположив, что  $a^2 = 3b^2$ , и расположив в

трех углах равностороннего треугольника со стороной  $a$  равносторонние треугольники, длины сторон которых равны  $b$ , мы получим три красных треугольника, сумма площадей которых равна площади синего треугольника (поскольку площадь пропорциональна квадрату стороны). Алгебраически это доказательство выглядит так: если  $a^2 = 3b^2$ , то  $(3b - 2a)^2 = 3(2b - a)^2$ .

Чертеж для доказательства иррациональности числа  $\sqrt{5}$  аналогичен, но гораздо сложнее. Расположив во всех пяти углах правильного

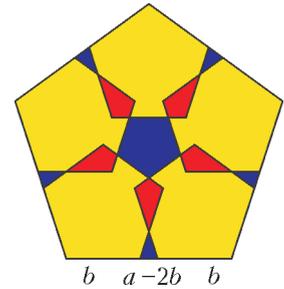


Рис. 3

правильного пятиугольника со стороной  $a$  правильные пятиугольники со сторонами длины  $b$ , где  $a^2 = 5b^2$  (рис.3), мы получаем непокрытый (синий) центральный пятиугольник, пять непокрытых синих треугольников и пять дважды покрытых красных четырехугольников. Отразив каждый из синих треугольников относительно вершины, как показано на рисунке 4, мы получаем пять красных пятиугольников, сумма площадей которых равна площади синего пятиугольника.

Стоп! А почему красные пятиугольники правильные? Наверное, нам сейчас нужно вычислить длины сторон и проверить, что действительно все стороны одной длины? (Про углы не говорю, с ними все очевидно: подумайте сами, почему!)

Видимо, совсем без вычислений не обойтись.

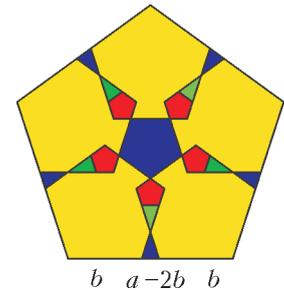


Рис. 4

**Задача.** Убедитесь, что красные пятиугольники на рисунке 4 равносторонние.

(Решение задачи приведено в конце статьи.)

Алгебраически это доказательство записывается так: если  $a^2 = 5b^2$ , то  $(5b - 2a)^2 = 5(a - 2b)^2$  (проверьте!).

Наконец, докажем иррациональность числа  $\sqrt{6}$ . Расположив шесть желтых треугольников со сторонами длины  $b$ , где  $a^2 = 6b^2$ , как показано на рисунке 5, видим, что центральный зеленый треугольник покрыт не дважды, как красные треугольники, а трижды. Но зеленый треугольник равен красному (подумайте, почему). Следовательно, сумма площадей трех синих треугольников равна удвоенной площади красного треугольника. Удваивая, видим, что шестеренная площадь синего треугольника в 16 раз больше площади красного треугольника. Поскольку из 16 равносторонних треугольников можно собрать один равносторонний треугольник, то нам удалось сделать шаг бесконечного спуска.

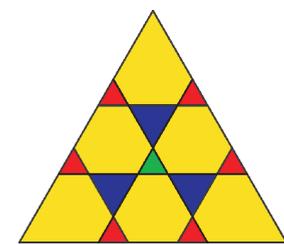


Рис. 5

Как и в предыдущих трех случаях, укажу алгебраическую запись этого доказательства: если  $a^2 = 6b^2$ , то  $(2(3b - a))^2 = 6(a - 2b)^2$  (проверьте!).

Вот так Тенненбаум смог, через многие столетия после пифагорейцев, по-новому доказать иррациональность чисел  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$  и  $\sqrt{6}$ . Хотелось бы, конечно, доказать при помощи такого рода рисунков и иррациональность числа  $\sqrt{7}$ , и вообще иррациональность квадратного корня из любого натурального числа, не являющегося квадратом. К сожалению, это сделать не удалось и вряд ли кому-то удастся. Но даже четыре рассмотренных случая весьма симпатичны, не правда ли?

#### Решение задачи

Докажем, что три соседние стороны в равноугольном красном пятиугольнике (см. рис.4) равны – отсюда нетрудно получить, что он тогда и равносторонний.

Поскольку желтые пятиугольники правильные, все их углы равны  $108^\circ$ . Поэтому синие треугольники – равнобедренные с углами при основании, равными  $72^\circ$ , и углом  $36^\circ$  при вершине.

На рисунке 6 изображен один из синих треугольников отдельно. Замечательное свойство этого треугольника состоит в том, что биссектриса  $AD$  делит его на два равнобедренных:  $ADB$  и  $DAC$  (проверьте!), откуда  $AC = AD = BD$ . По свойству биссектрисы  $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BD}$ , и, если обозначить  $AC$  за

$x$  и  $CD$  за  $y$ , имеем пропорцию  $\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$ . Она сводится к квадратному уравнению относительно  $x/y$ . Решив уравнение, находим  $x/y$  – оно оказывается равным  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ , и оно же равно отношению боковой стороны синего треугольника к основанию (из нашей пропорции).

Вернемся к красным пятиугольникам. У любого из них сторона, примыкающая к зеленому треугольнику, совпадает с основанием синего треугольника, т.е. равна  $a - 2b$ . Длина соседней стороны красного пятиугольника равна тогда  $b - 2 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}(a - 2b)$ . Вспомнив, что  $a = \sqrt{5}b$ , преобразуем наше длинное выражение и получаем в итоге  $b(\sqrt{5} - 2)$ , т.е. снова  $a - 2b$ . Значит, в красном пятиугольнике одна из сторон равна двум соседним, что и требовалось.

Это доказательство иррациональности числа  $\sqrt{5}$  уже гораздо сложнее обычного. Но зато какой красивый геометрический факт – красные пятиугольники на рисунке 4 правильные, если числа  $a$  и  $b$  связаны соотношением  $a = \sqrt{5}b$  (хотя бы одно из них будет иррациональным).

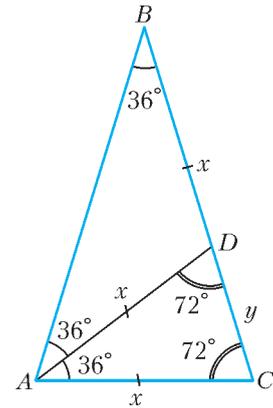


Рис. 6

## Подвиг юного Бертольда

А. КОТОВА

ГРЬОР БОЛЬШОЙ ХВОСТ ДРЕМАЛ ПОСЛЕ СЫТНОГО обеда, когда от ворот раздался шум и лязг.

– Что там, Курундис? – спросил дракон у своего придворного черного мага.

– Драконоборцы, сэр, – отвечал маг, качая головой.

– Опять, – проворчал Грыор и раздраженно дернул хвостом. – Чего им на этот раз надо?

– Как всегда, – пожал плечами маг. – Сокровища и принцессу.

– Ну что за люди, – возмутился дракон. – Где я им принцессу возьму? У самого ни одной нет. А сокровища не отдам! В темницу их, Курундис!

– Уже, – меланхолично сообщил Курундис. – Пока мы с вами говорим, сэр, их уже препроводили. Временно загнали в большой подземный зал. Ровным счетом двадцать штук, сэр. Будете воспитывать лично?

– Не хочу, – Грыор помотал здоровенной башкой и зевнул. – Надоели. Придумай для них что-нибудь заковыристое, пусть напугаются хорошенько.

– Будет сделано, – поклонился черный маг.

Грыор кивнул, опустил голову на лапы и задремал снова.

Драконоборцы сидели на сыром каменном полу в большом подземном зале и ожидали своей участи.

– Сожрет, – грустно вздохнул юный Бертольд из Рокслея, бывший школяр, сбежавший от латыни и арифметики навстречу приключениям. – А я так хотел совершить первый в жизни подвиг...

– Отчаяние – грех, – наставительно сказал усатый дядька Элвард, опытный воин. – Всегда надо надеяться до последнего, юноша. Может, тебе еще будет дан шанс совершить свой подвиг.

Заскрипела, отворяясь, тяжелая дубовая дверь, вошли стражники с факелами, а вслед за ними – тощий бородатый старец в черной мантии, сразу ясно – колдун.

– Ну что, горе-воины? – спросил старик неприязненно. – Попались? Пеняйте теперь на себя. Будем вас мучить.

Драконоборцы угрюмо молчали.

– Значит, так, – сообщил старик. – С завтрашнего дня и приступим. Господин мой дракон милостив и не съест вас сразу. Более того, он даже, возможно, вас отпустит.

Драконоборцы зашевелились, по большому залу пронесся шорох и лязг кольчуг.

– Завтра утром всех вас разведут по отдельным камеркам, и больше вы друг друга не увидите, –

продолжал колдун. – И будете вы сидеть там и думать о своем поведении. Каждый вечер одного из вас будут отводить в Черную-черную комнату, где нет ничего, кроме волшебной лампы, и господин мой дракон будет обращаться к избранному лично. Сейчас лампа погашена. Хотите – внимайте ему во тьме, хотите – зажигайте лампу. Или гасите, если она будет гореть, это ваше дело. Лампа зажигается и гаснет просто – достаточно хлопнуть в ладоши. И будет так продолжаться долго, долго...

– Вечно? – спросил шепотом юный Бертольд.

– Может быть, и вечно, – сердито бросил старик. – Не перебивайте, молодой человек. Уж что я вам точно обещаю – все вы непременно побываете в Черной-черной комнате, никого не пропустим. И будьте уверены, что каждого из вас будут вызывать туда снова и снова. Но, как я уже сказал, господин мой дракон милостив...

Он обвел взглядом понурившихся воинов.

– Я, черный маг Курундис, клянусь вам всей моей магией и именем господина моего дракона Грыора, что в тот же миг, как кто-либо из вас скажет мне, что все вы уже побывали в Черной-черной комнате, вы будете отпущены на волю – разумеется, без оружия и пешком, – если сказанное будет верно. Но бойтесь ошибиться! Ибо в случае ошибки все вы будете съедены, и, уверяю вас, господин мой дракон сделает это с большим удовольствием. Все ли вы поняли, господа драконоборцы?

– Поняли, как не понять... – проворчал дядька Элвард.

Маг кивнул и вышел, вслед за ним стражники. Захлопнулась дверь, загремели замки.

– Сожрет... Сначала правоучениями замучает, а потом все равно сожрет... – раздалось в зале.

Юный Бертольд поднял голову.

– Дядь Элвард, правду ли говорят, что драконы не лгут? – спросил он.

Усатый воин кивнул.

– Тогда выход обязательно есть, – сказал юноша. – Нужно только хорошенько подумать. Ведь дракон обещал.

– Устами младенца глаголет истина, – веско произнес здоровенный Том из Стоунбриджа. – Давайте, братья, поразмыслим.

– Мечом-то проще, – проворчал кто-то.

И в зале повисла глубокая тишина. С непривычки думалось медленно и тяжело.

– Ну, что ты изобрел для наших пленников? – спросил Грыор за завтраком.

Курундис объяснил.

– Эй, маг, я же сказал, что не хочу воспитывать их лично!

– Сэр, вам не нужно трудиться, я сохранил запись вашей прошлогодней речи. Помните, вы наставляли того барона, как бишь его звали... Магический кристалл воспроизведет каждое слово без изъяна.

– А, тогда ладно... И все же ты неправ, маг. Зачем было клятвенно обещать, что я их непременно съем сам, да еще и с удовольствием? Вдруг придется? Знаешь ведь, терпеть не могу человечины...

– О, сэр, не волнуйтесь. Я верю, что настоящая опасность способна научить думать даже драконоборцев.

– Посмотрим, посмотрим, – хмыкнул Грыор. – Хуже всего, если они так и не рискнут дать тебе ответ. Сколько их? Двадцать? Двадцать камер заняты, неизвестно на сколько лет, а могут же еще явиться... ээээ... соискатели.

– Сэр, готов поспорить, – они справятся!

– На что спорим? – оживился дракон. – На щелбаны? Двадцать щелбанов, по числу пленников – идет? Если через пять лет они все еще будут здесь, – я выиграл! – Идет, – согласился маг.

Ударили по рукам.

Время шло. Иногда Грыор вспоминал о своих узниках, спрашивал, как у них дела.

– По-прежнему, – отвечал Курундис. – Ведем воспитательную работу. Некоторые уже выслушали вашу речь по четыре раза, сэр.

– И как? – интересовался Грыор.

– О, кто как, сэр. Некоторые бранятся. Некоторые рыдают. Один поклялся, если спасется, уйти в монастырь.

– Ну-ну, – хмыкал Грыор. – Будем надеяться, ему это удастся.

Однажды утром маг вбежал в тронный зал драконьего замка, слегка подпрыгивая.

– Я же говорил! – воскликнул он. – Сегодня этот мальчишка, который из Рокслея, заявил мне, что все уже побывали в Черной-черной комнате.

– И это действительно так? – спросил дракон.

– Да, сэр! – отвечал маг. – Так отпустим или вы еще скажете им пару слов?

– Пусть катятся на все четыре стороны, – фыркнул Грыор. – Наконец-то я от них избавлюсь.

– Да, сэр, – кивнул маг. – Пойду распоряжусь. А вы пока готовьте лоб.

– Что? – недоуменно повел хвостом дракон.

– Двадцать щелбанов, сэр, – поклонился маг. – Только не делайте вид, будто вы забыли. Драконы никогда ничего не забывают.

– Тьфу, – проворчал дракон. – Действительно. Ничего не поделаешь, проиграл – так проиграл...

...Драконоборцы вышли на свет, спотыкаясь с непривычки.

– Воистину, это был великий подвиг, о Бертольд из Рокслея, – сказал Элвард, усы которого за время заключения стали длиннее втрое. – Не сомневаюсь, ты заслужил рыцарские шпоры, а в будущем станешь великим воином, и все драконы склонятся перед тобой...

– Ну уж нет, – покачал головой Бертольд, – драконами я теперь сыт по горло. Поеду лучше в университет, учить латынь и арифметику. Ручаюсь, ни один профессор не может быть таким занудой, как Грыор Большой Хвост...

А вы поняли, сэры, как юному Бертольду удалось совершить сей подвиг?

# Красное небо, синяя луна

**А. СТАСЕНКО**

*Закат из золотого стал как медь,  
Покрылись облака зеленой ржою...*

Н.Гумилев

**НО** – СИНЯЯ ЛУНА, КРАСНОЕ НЕБО – НЕУЖЕЛИ ТАКОЕ бывает?

– А вот и бывает. Однако, все по порядку...

Начнем с того, что знает каждый отличник: электромагнитная волна бежит со скоростью света, векторы электрического и магнитного полей, точнее векторы их напряженностей, в волне перпендикулярны друг другу и направлению ее распространения. Образно говоря, она дважды поперечна, в отличие от звуковой волны в газе, которая всего лишь единожды продольна.

Напряженность электрического поля  $E$ , как известно, измеряется в вольтах на метр:  $[E] = \frac{В}{м}$ . Скажем несколько

слов и о напряженности магнитного поля  $H$ . (Подчеркнем – именно о напряженности, а не об индукции  $B$ , которая, впрочем, строго пропорциональна  $H$ , по крайней мере в вакууме, но имеет другую размерность.) Представим себе провод с постоянным током силой  $I$  (рис.1). Согласно одному из законов электромагнетизма, вокруг этого провода существует магнитное поле, линии напряженности которого представляют собой окружности, соосные с током. Причем произведение напряженности  $H$  поля на длину  $2\pi r$  любой окружности радиусом  $r$  как раз и равно силе тока:

$$H \cdot 2\pi r = I.$$

(Левую часть этого равенства физики называют циркуляцией вектора  $H$  по контуру, длина которого в рассматриваемом частном случае равна  $2\pi r$ .) Отсюда видна и размерность напряженности магнитного поля:  $[H] = \frac{А}{м}$ .

Разумно предположить, что если выделить только кусок длиной  $l$  этого бесконечного провода, то его вклад  $H_l$  в суммарную величину напряженности поля (по крайней мере, в меридиональной плоскости) будет пропорционален не только  $I$ , но и  $l$ . Произведение  $Il$  можно назвать элементом тока, его размерность  $[Il] = А \cdot м$ .

Далее, известно, что электромагнитное поле распространяется даже в вакууме (причем, свободнее всего) благодаря тому, что переменные (во времени) электрическое и магнитное поля порождают друг друга. Как тут не предположить, что напряженности этих полей связаны соотношением пропорциональности:

$$E \sim H. \quad (1)$$

А что если их перемножить? По крайней мере, любопытно узнать размерность произведения:

$$[EH] = \frac{В}{м} \cdot \frac{А}{м} = \frac{Вт}{м^2} = \frac{Дж}{с \cdot м^2}.$$

Но ведь это размерность плотности потока энергии  $P$ , т.е. энергии, протекающей в единицу времени через перпендикулярную площадку единичной площади. Эта плотность потока называется вектором Пойнтинга – по имени английского физика Джона Генри Пойнтинга, который ввел это понятие в 1884 году. Заметим, что для упругой волны аналогичное понятие еще раньше (1874 г.) было введено русским физиком Николаем Алексеевичем Умовым. Поэтому плотность потока энергии любой физической природы справедливо называют вектором Умова–Пойнтинга. Но здесь нас будет интересовать именно электромагнитное поле. Итак,

$$EH = P. \quad (2)$$

Однако постоянный ток не может породить электромагнитную волну. Для ее возникновения нужно, чтобы ток стал переменным, например синусоидальным с периодом  $T$  или частотой  $\omega = 2\pi/T$ :

$$I = I_m \sin \omega t.$$

Тогда магнитное поле будет пропорционально скорости (темпу) изменения тока со временем, или, как говорят умные люди, пропорционально первой производной тока по времени

$$I' = \omega I \sim \frac{I}{T}, \quad [I'] = \frac{А}{с}.$$

Тут, конечно, стоило бы поговорить о производной с математической точки зрения. Но нам достаточно того, что размерность этой величины должна содержать секунду в знаменателе, т.е. быть обратно пропорциональной периоду  $T$  изменения тока или прямо пропорциональной частоте этого изменения  $\omega$ . Тогда получим

$$H_l \sim \frac{I'l}{r}. \quad (3)$$

Появление в знаменателе расстояния  $r$  от излучателя не случайно: оно есть результат закона сохранения потока энергии. Действительно, плотность потока энергии (2) должна убывать с расстоянием как  $1/r^2$ . А поскольку напряженности электрического и магнитного полей пропорциональны друг другу (1), то каждая из них пропорциональна  $1/r$ .

Теперь представим нужный нам переменный ток как результат колебательного движения вверх–вниз положительного электрического заряда  $q$  в пределах отрезка длиной  $l$  (рис.2). Когда этот заряд  $q$  находится в центре отрезка, его компенсирует неподвижный заряд противоположного знака; когда  $q$  смещается на расстояние  $x$  ( $|x| < l$ ), возникает электрический диполь с моментом  $qx$ , хотя отрезок в целом остается электрически нейтральным. Но поскольку заряд движется со скоростью  $v = x'$  (ведь скорость – это производная от расстояния по времени), его можно уподобить элементу тока

$$Il = qv = qx', \quad [qv] = \text{Кл} \frac{м}{с} = \frac{\text{Кл}}{с} м = А \cdot м,$$

причем  $I'l = qv' = qx''$ . Значит, выражение (3) можно пере-

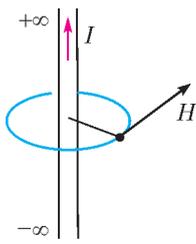


Рис. 1

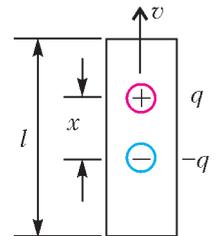


Рис. 2

писать в виде

$$H_l \sim \frac{l' l}{r} = \frac{q x''}{r} \sim \frac{q l \omega^2}{r}.$$

Понятно, что квадрат частоты возник от того, что мы дважды брали производную от смещения заряда  $x = l \sin \omega t$ . Теперь, вспомнив (1) и (2), получим плотность потока энергии:

$$P_l = E_l H_l \sim \left( \frac{q v'}{r} \right)^2 \sim q^2 l^2 \frac{\omega^4}{r^2}.$$

Тут уже есть, чем полюбоваться. Во-первых, векторы  $\vec{P}_l$ ,  $\vec{E}_l$ ,  $\vec{H}_l$  (рис.3) взаимно перпендикулярны и образуют

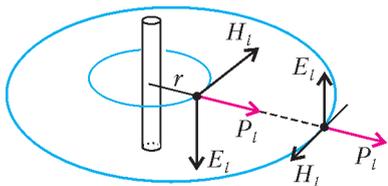


Рис. 3

правую тройку (как координаты  $x, y, z$  декартовой системы) – это, как упоминалось в самом начале, знает каждый отличник. Понятно, что вектор плотности потока энергии направлен по радиусу от излучающей «элементарной антенны длиной  $l$ », а его модуль убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от диполя (при  $r \gg l$ ). Последнее наблюдение отражает закон сохранения энергии (уже использованный выше): ее полный поток зависит от площади  $4\pi r^2$  сферы радиусом  $r$ , поэтому, суммируя плотности потока энергии по всем направлениям от диполя (а не только в меридиональной плоскости, как показано на рисунке 3), получим полный поток энергии:

$$W \sim q^2 l^2 \omega^4, [W] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}}. \quad (4)$$

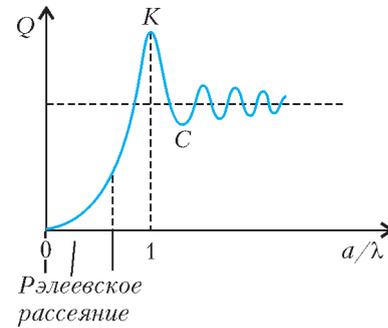
Рисунок 3 демонстрирует также, что через половину длины волны направления векторов электрического и магнитного полей изменяются на противоположные, в то время как вектор Пойнтинга всегда направлен по радиусу-вектору, проведенному из середины диполя.

Но вот что самое интересное: полный поток энергии  $W$  оказался пропорциональным четвертой степени частоты колебаний тока. Эта зависимость получена (1871 г.) замечательным английским физиком Джоном Уильямом Рэлеем, а само явление, описываемое выражением (4), назвали рэлеевским рассеянием. И это позволяет объяснить многие интересные факты.

Например, почему небо обычно голубое, хотя в солнечном спектре (который глаз воспринимает в диапазоне длин волн приблизительно от 0,4 до 0,75 микрон – от фиолетового до красного участков) присутствуют все цвета? Теперь мы можем объяснить это следующим образом. Атмосфера не совсем однородна: в ней в любой точке происходят так называемые флуктуации плотности – постоянно образуются и распадаются сгустки и разрежения. Относительная флуктуация концентрации молекул тем более вероятна, чем меньшее количество  $N$  молекул в ней участвует, так что  $N = \langle N \rangle (1 \pm 1/\sqrt{\langle N \rangle})$ , где  $\langle N \rangle$  – среднее значение за достаточно большой промежуток времени. Световые волны, идущие от Солнца, воспринимают эти сгустки как частицы. А поскольку длина волны синего цвета меньше, чем красного, то, согласно, выражению (4), он и сильнее рассеивается. По этой же причине Солнце и Луна при закате и восходе часто кажутся красными: путь света в

атмосфере в скользких лучах становится большим, и все интенсивнее отсеивается во все стороны преимущественно голубая компонента.

Но рэлеевское рассеяние соответствует случаю очень мелких частиц, размеры которых  $a$  много меньше длины волны  $\lambda$ . А что если рассматривать более крупные частицы? Как показали исследования,



Рэлеевское  
рассеяние

Рис. 4

при некоторых  $a$  наблюдаются максимальные значения так называемого коэффициента рассеяния  $Q$ . Зависимость этой оптической характеристики от произвольного значения отношения  $a/\lambda$  (рис.4) позволяет объяснить и кое-какие непривычные явления. Так, более полувека тому назад на большей части Европы Солнце и Луна казались голубыми из-за рассеяния их света на частицах, занесенных высотными ветрами из горящих лесов Канады (через Атлантику!). Значит, из лучей, идущих от этих небесных тел, отсеивались красная и желтая компоненты и оставалась преимущественно коротковолновая часть спектра. Этот факт можно объяснить, например, тем, что красному свету соответствовал максимум (точка  $K$ ), а синему – минимум (точка  $C$ ) на приведенной кривой рассеяния.

А еще раньше древние хроники – и римские, и китайские – сообщали о красном небе. Как оказалось, произошло извержение вулкана (186 г.) в Новой Зеландии, т.е. в южном полушарии, отделенном от северного не только экватором, но и муссонными и пассатными ветрами!

И уж совсем недавно (2004 г.) в популярной телевизионной передаче сообщалось, что Землю ждет не потепление, а *потемнение*: уже 20% солнечного излучения не доходит до ее поверхности, так как в атмосфере сажи оказалось вдвое больше, чем прогнозировали.

А что случится, если взорвутся все накопленные человечеством ядерные заряды? Тогда сгорят деревья, трава, плодородная почва... и в атмосферу поднимутся миллиарды тонн частиц пепла. Поскольку эти долгоживущие частицы будут размером много меньше 10 микрон (а именно на такой длине волны излучает Земля с температурой около 300 К), то излучение Земли будет уходить в космос – такие облака прозрачны для этого излучения. Между тем, для солнечного излучения с характерной длиной волны  $\sim 0,5$  мкм размеры этих же частиц могут оказаться порядка длины волны и стать сильными рассеивателями, не допускающими солнечный свет к Земле. В результате Земля охладится, океаны замерзнут, станет холодно и темно – ни красного неба, ни синей луны, ни наоборот. Наступит так называемая ядерная зима, основные характеристики которой среди первых в мире теоретически предсказали советские ученые академик Н.Н.Моисеев и профессор В.В.Александров (кстати сказать, выпускник Московского физико-технического института).

Дети, учитесь и берегите мир!

# Две простые, но не вполне тривиальные формулы

М. КАГАНОВ

Речь пойдет о двух довольно простых явлениях: о течении жидкости или газа по трубе и о прохождении электрического тока по проводнику. Мне хотелось написать «о течении электрического тока» и отметить, что язык свидетельствует о сходстве, даже тождественности обоих явлений: и там, и там что-то течет. Потом сообразил, что «течение тока» – масло масляное.

Формула, описывающая течение жидкости по трубе, носит имя французского физиолога и физика Жана Луи Мари Пуазейля (1799 – 1869). Ее называют *законом Пуазейля*. А формулу, описывающую прохождение тока по проводнику, называют *законом Ома*. Георг Симон Ом – немецкий физик, жил с 1787 по 1854 год. Я привел годы жизни тех, именем которых названы обсуждаемые нами формулы, для того чтобы подчеркнуть: решил задуматься над старыми, хорошо изученными явлениями. Решил, так как заметил: если сравнивать эти явления, то можно обнаружить нечто интересное. Интерес трудно поддается определению. Одному интересно, а другому – безмерно скучно. Буду рад, если то, что интересно мне, покажется интересным и читателям.

Начнем с *закона Пуазейля*. Любая физическая формула включает в себя буквы (символы), обозначающие физические величины, которые могут быть определены и измерены независимым образом. Каждую физическую величину надо уметь определить независимо от других величин, входящих в формулу. Нам придется останавливаться на подобных вопросах. Но дальше – более конкретно, чтоб не увязнуть.

Скорость протекания жидкости или газа по трубе определяется величиной, называемой расходом. Расход, обозначаемый буквой  $Q$ , есть количество (масса) жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы в единицу времени:

$$Q = \pi R^2 \rho V,$$

если для простоты предположить, что труба – цилиндр радиусом  $R$ ,  $\rho$  – плотность жидкости, а  $V$  – ее средняя по сечению трубы скорость. Размерность расхода есть

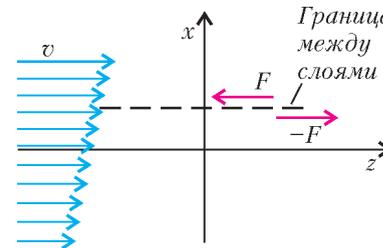
$$[Q] = \text{см}^2 \cdot (\text{г}/\text{см}^3) \cdot (\text{см}/\text{с}) = \text{г} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Закон Пуазейля утверждает:

$$Q = \frac{\pi \Delta p R^4}{8 L \nu}. \quad (1)$$

Здесь  $\Delta p$  – разность давлений на концах трубы длиной  $L$ , а  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости, равный отношению обычной вязкости к плотности:  $\nu = \eta/\rho$ . Напомним,

что коэффициент вязкости (или просто вязкость)  $\eta$  описывает внутреннее (вязкое) трение в жидкости (или газе). Сила трения между слоями жидкости возникает в том случае, когда скорость течения меняется от слоя к слою. Если, например, жидкость течет в направлении  $z$ , а ее скорость  $v$  зависит от координаты  $x$ , то сила трения, в расчете на единицу площади границы, пропорциональна быстрой изменению скорости в поперечном направлении (см. рисунок):



$$\frac{F}{S} = \eta \left| \frac{dv}{dx} \right|. \quad (2)$$

Эта формула написана для ламинарного течения (см. ниже) и фактически является определением коэффициента вязкости  $\eta$ . Отметим, что вязкое трение (как и любое трение) приводит к диссипации механической энергии, т.е. к превращению ее в тепловую энергию. Правда, с точки зрения молекулярной теории, механизм возникновения вязкого трения совсем не такой, как для сухого трения. За счет теплового движения молекулы из одного слоя перескакивают в другой. Молекулы из «медленного» слоя, попадая в «быстрый», должны (в среднем) приобрести дополнительную скорость, т.е. на них со стороны остальных молекул слоя должна подействовать сила «вперед». По третьему закону Ньютона, на слой со стороны «гостевых» молекул будет действовать сила «назад». Аналогично – для молекул, попадающих из «быстрого» слоя в «медленный».

Коэффициенты вязкости жидкостей и газов различаются на много порядков. Воспроизведем часть таблицы значений  $\eta$  и  $\nu$  при температуре 20 °С, взятой из справочника:

	$\eta$ , г/(см·с)	$\nu$ , см <sup>2</sup> /с
Вода	0,010	0,010
Воздух	$1,8 \cdot 10^{-4}$	0,150
Спирт	0,018	0,022
Глицерин	8,5	6,8
Ртуть	0,0156	0,0012

Заметим, что здесь значения  $\eta$  (и  $\nu$ ) даны в граммах, сантиметрах и секундах. Обычно значение вязкости в справочниках приводится в единицах, обозначаемых Па·с, где единица давления Па названа по имени великого французского ученого – физика, математика и философа Блеза Паскаля (1623–1662). Иногда вязкость измеряют в пуазах (П): 1 П = 0,1 Па·с. Эта единица вязкости, конечно, получила свое название в честь Пуазейля.

Формула (1) и знание численных значений входящих в нее величин (радиуса трубы  $R$ , перепада давления  $\Delta p$  на расстоянии  $L$  и кинематической вязкости  $\nu$ ), естественно, позволяют вычислить расход  $Q$ , но, боюсь, мало помогут понять, что происходит. Специалисты, встречаясь с чем-то новым, пытаются выяснить *физику явления*, а иногда наоборот – понимая, что происходит или должно происходить, пытаются описать, как можно наблюдать нечто новое. Или, наконец, сами ставят эксперимент.

Прежде чем двигаться дальше, сделаем одно замечание. Все многократно наблюдали, что течение жидкости в разных

условиях происходит по-разному. Иногда жидкость бурлит, пенится. Такое движение называют турбулентным (от латинского *turbulentus* – беспорядочный). Плавное, спокойное течение жидкости называют ламинарным (по-латыни *lamina* – пластина, слой). Такое течение жидкости осуществляется как бы слоями, которые различаются только величиной скорости, медленно меняющейся от слоя к слою. Так вот, закон Пуазейля описывает ламинарное течение жидкости по трубе.

Теперь можно продолжать. Подставим в формулу (1) выражение для расхода  $Q$ , заменим кинематическую вязкость ее выражением  $\nu = \eta/\rho$ , сократим в правой и левой частях равенства совпадающие множители и для средней скорости  $V$  получим

$$V = \frac{1}{8} \frac{\Delta p}{L} \frac{R^2}{\eta}. \quad (3)$$

Движение жидкости описывает гидродинамика. Гидродинамика – одна из наук, принадлежащих тому разделу физики, который принято называть макрофизикой. Другая наука, принадлежащая макрофизике, – теория упругости. Ее вместе с гидродинамикой часто объединяют в *механику сплошных сред*. Эта констатация – для того чтобы подчеркнуть: для гидродинамики жидкость это сплошная среда. В основных чертах гидродинамика была создана до того, как было осознано, что макроскопические тела состоят из атомов и молекул. В чем это проявляется? В том, что все величины – характеристики, описывающие жидкость, относятся к большому числу атомов. Например, гидродинамика имеет дело с плотностью. Плотность  $\rho$ , т.е. масса единицы объема, – явно макроскопическая величина. Даже скорость жидкости, которая может изменяться от «точки» к «точке» (например, по сечению трубы), при гидродинамическом описании есть не скорость отдельных частиц, а скорость элемента объема (массы) жидкости. Элемент объема мал по сравнению с радиусом трубы, но велик по сравнению с межатомными расстояниями, т.е. это макроскопический объект. Поэтому-то слово «точка» здесь взято в кавычки. Обычно так не поступают, и мы в дальнейшем не будем.

Теперь мы прекрасно знаем, что все макроскопические тела состоят из атомных частиц, а иногда и субатомных (так, в металлах имеются свободные электроны). Есть возможность выразить любые макроскопические величины через атомные, ионные, молекулярные или электронные характеристики. Простейший пример. Пусть жидкость состоит из молекул массой  $M$ , а  $n$  – число молекул в единице объема. Тогда  $\rho = Mn$ . Гидродинамическая скорость – скорость элемента объема  $\vec{v}(\vec{r})$  – это средняя скорость молекул жидкости в этом объеме. Введенная выше (формула 3) скорость  $V$  есть среднее по сечению трубы значение скорости  $\vec{v}(\vec{r})$ . Эта скорость в обычных условиях (например, в водопроводных трубах) составляет несколько метров в секунду. Мы специально выделили курсивом утверждение, что введенная скорость  $V$  – это среднее значение скорости по сечению трубы. Чтобы не забыть. Мы покажем ниже, как скорость воды меняется с расстоянием от центра трубы.

«Что-то все слишком просто, – уверен, недоумевает читатель, – а тепловое движение молекул?» Попробуем разобраться. Напомним, что тепловое движение хаотично, молекулы движутся во все стороны, у теплового движения нет

выделенного направления. Средняя энергия теплового движения молекул равна

$$\frac{Mv_T^2}{2} = \frac{3}{2} k_B T,$$

где  $v_T$  – скорость теплового движения,  $T$  – температура (в градусах Кельвина),  $k_B$  – постоянная Больцмана. Нетрудно посчитать, что для воды при обычных условиях ( $T = 300$  К) скорость теплового движения составляет  $v_T \approx 3 \cdot 10^2$  м/с. Теперь картина прояснилась: молекулы хаотически быстро двигаются во все стороны, сталкиваются друг с другом, обмениваются энергиями и импульсами, и вся эта движущаяся масса медленно (со скоростью, в сотни раз меньшей тепловой) движется по трубе. Таким образом, истинная скорость частицы есть  $\vec{v}(\vec{r}) + \vec{v}_T$ , но среднее значение тепловой скорости равно нулю. Гидродинамика способна описать лишь поведение средней скорости. В общем случае средняя скорость зависит не только от  $\vec{r}$ , но и от времени:  $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t)$ .

Задумаемся. Формула (3) утверждает: средняя скорость течения жидкости линейно зависит от приложенной силы. Конечно, именно разность давлений создает силу, под действием которой жидкость течет с постоянной средней скоростью. Согласно механике Ньютона, под действием постоянной силы тело движется с ускорением. Отсутствие ускорения указывает, что существует компенсирующая сила. Она, эта сила, направлена против внешней силы и линейно зависит от скорости течения. Равенство суммы сил нулю определяет среднюю скорость течения. Не будем говорить загадками. Сила, которая компенсирует внешнюю силу, это сила трения жидкости о стенки трубы. Сила трения тем больше, чем больше вязкость, и поэтому скорость  $V$  обратно пропорциональна вязкости.

Все сказанное относится к первой из двух формул, определивших название статьи. Обратимся теперь ко второй формуле – к *закону Ома*. В отличие от закона Пуазейля, его можно сформулировать так, чтобы равенство не содержало размеров проводника. Правда, только в том случае, если проводник достаточно больших (макроскопических) размеров. (Для модных ныне наноструктур такой подход неприемлем.)

Способность вещества проводить электрический ток описывается удельной электропроводностью  $\sigma$ , с помощью которой можно записать закон Ома в форме, не зависящей от конкретной формы и размеров образца. Если  $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$  – плотность электрического тока в точке  $\vec{r}$ , а  $\vec{E}(\vec{r})$  – напряженность электрического поля в той же точке, то между ними есть линейная связь. Ее именуют законом Ома в локальной (дифференциальной) форме:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sigma \vec{E}(\vec{r}), \quad (4)$$

где и плотность тока, и напряженность поля – векторные величины. В анизотропном проводнике, в кристалле, связь между  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$  сложнее, но мы не будем на этом останавливаться. Отметим только, что характер этой анизотропной зависимости может быть установлен на основании свойств симметрии кристалла, для этого нет нужды знать природу проводимости. Характер анизотропии – следствие законов макроскопической физики. Другой важный вывод, не требующий уточнения природы проводимости, таков: в равновесных условиях  $\sigma > 0$ . Величина, обратная удельной проводимости, это удельное сопротивление:  $\rho = 1/\sigma$ . Закон Ома и

уравнения электродинамики сплошных сред – науки об электрических и магнитных свойствах макротел – позволяют рассчитать распределение тока и электромагнитных полей по проводнику. Самые разнообразные задачи электротехники и радиофизики решены таким путем и имеют огромное практическое значение.

Знание того, что в металлах и полупроводниках электрический ток осуществляется переносом зарядов электронами, позволяет записать плотность тока следующим образом:  $\vec{j} = en_e \vec{V}_e$ , где  $e$  – заряд электрона,  $n_e$  – число электронов в единице объема, а  $\vec{V}_e$  – средняя скорость движения электронов под действием электрического поля  $\vec{E}$ . Тогда получаем

$$\vec{V}_e = \frac{\sigma}{e^2 n_e} e \vec{E}. \quad (5)$$

Мы домножили и разделили на заряд электрона  $e$ , чтобы выделить силу  $\vec{F}$ , действующую на электрон:  $\vec{F} = e \vec{E}$ . Линейная зависимость средней скорости движения электронов от силы (скорости, а не ускорения!) показывает, что есть сила, компенсирующая силу  $\vec{F}$ . Это – сила трения электронов обо все, что мешает их движению по проводнику (см. ниже).

Среднюю скорость движения частиц (в данном случае электронов) удобно характеризовать подвижностью – средней скоростью частиц, обусловленной единичной силой. Пусть подвижность электронов есть  $U_e$ . Тогда, согласно формуле (5),

$$U_e = \frac{\sigma}{e^2 n_e}. \quad (6)$$

Значения удельной электропроводности  $\sigma$ , а точнее удельного сопротивления  $\rho = 1/\sigma$ , можно найти во многих справочниках. В лучших из них не только указано значение при определенной температуре, но задается и температурная зависимость  $\rho(T)$ . Проводимость существенно зависит от температуры. Но нас, скорее, будет интересовать не столько температурная зависимость, сколько полученная в электронной теории металлов зависимость удельной проводимости  $\sigma$  от параметров, описывающих электроны проводимости – тех, кто осуществляет перенос заряда, когда по проводнику течет ток.

Простейшая модель электронной проводимости – это модель Друде–Лоренца–Зоммерфельда, согласно которой перенос заряда в металле осуществляют свободные электроны. Откуда они взялись в металлах? При конденсации атомов в жидкость или кристалл более половины атомов, имеющих в таблице Менделеева, ионизируются: электроны, слабо связанные с ядром, вовсе теряют с ним связь и перемещаются свободно по кристаллу. Почему движение в периодическом поле ионов похоже на движение в свободном пространстве, объяснила квантовая механика. Мы не будем на этом останавливаться, а просто примем модель Друде–Лоренца: *в металле есть газ свободных электронов*. Я не забыл Зоммерфельда, а не упомянул его сознательно, так как наличие газа свободных электронов в металлах предположили Друде и Лоренц (о полупроводниках тогда не знали). Зоммерфельд же понял, что *электронный газ надо описывать квантовыми формулами*.

Будем последовательны. В любом металле есть газ свободных электронов. На каждую частицу действует сила  $e \vec{E}$ , обязанная разности потенциалов на концах проводника. Если бы это была единственная сила, действующая на

электроны, то они бы ускорялись. Этого не происходит. Электроны, сталкиваясь с любыми нарушениями, которые всегда есть в кристалле, теряют приобретенный от электрического поля импульс и тормозятся. Даже в идеальном кристалле, в котором нет ни примесей, ни дефектов в структуре кристаллической решетки, т.е. нарушений в строго периодическом расположении атомов или ионов, при отличной от нуля температуре происходит рассеяние. Причиной торможения электронов служит тепловое движение атомов, их колебания вокруг строго фиксированных центров. Только и именно благодаря столкновениям электроны по проводнику движутся с трением. А вот столкновения электронов друг с другом не приводят к торможению: при межэлектронных столкновениях импульс коллектива электронов перераспределяется между электронами, не диссипирует, не исчезает безвозвратно и поток электронов не тормозится.

Итак, в результате столкновений с центрами рассеяния в объеме проводника возникает сила трения. В согласии с законом Ома, сила трения пропорциональна средней скорости газа электронов и направлена против этой скорости. Теперь мы можем записать уравнение движения электронов, т.е. уравнение второго закона Ньютона:

$$m \frac{d\vec{V}_e}{dt} = e \vec{E} + \vec{F}_{\text{тр}}, \quad (7)$$

где  $m$  – масса электрона, а  $\vec{F}_{\text{тр}} = -(m/\tau) \vec{V}_e$  – сила трения. Почему коэффициент пропорциональности между силой трения и скоростью написан в таком виде, сейчас будет ясно. В отсутствие электрического поля, когда  $E = 0$ , средняя скорость электронов обратится в ноль, даже если в момент выключения поля она не была равна нулю. Происходить этот процесс будет по экспоненциальному закону

$$V_e(t) = V_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

где  $V_0$  – начальная скорость, а  $\tau$  – время затухания направленного движения электронов. Если при каждом столкновении электрон заметно изменяет свой импульс, то по порядку величины  $\tau$  – это среднее время свободного пробега электрона, или среднее время между двумя столкновениями. Умножив время  $\tau$  на среднюю скорость теплового (хаотического) движения электронов, мы получим длину свободного пробега электронов  $l$  (среднюю, естественно). Чтобы закон Ома мог быть записан в виде формулы (4) с проводимостью, не зависящей от радиуса проволоки  $R$ , должно выполняться сильное условие:  $R \gg l$ . (В наноструктурах обычно  $l > R$ .)

Зная выражение для силы трения, из условия  $e \vec{E} + \vec{F}_{\text{тр}} = 0$  нетрудно найти не зависящую от времени среднюю скорость  $V_e$  и вычислить коэффициент электропроводности  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau}{m}. \quad (8)$$

Может показаться странным: зачем один коэффициент  $\sigma$  выражать через два других  $n_e$  и  $\tau$  (заряд электрона и его масса известны)? Дело в том, что оба параметра  $n_e$  и  $\tau$  могут быть независимо измерены, а тем самым формула (8), одна из важнейших формул электронной теории металлов, может быть проверена. Кроме того,  $n_e$  и  $\tau$  имеют простой физический смысл, так что формула (8) *объясняет закон Ома*. Она справедлива не только для металлов, но и для полупроводников, хотя значения  $n_e$  и  $\tau$  у полупроводников заметно

отличаются от соответствующих значений в металлах. Подставляя выражение (8) в формулу (6) для подвижности электронов, получим

$$U_e = \frac{\tau}{m}. \quad (9)$$

А теперь попытаемся определить подвижность частиц при пуазейловом течении жидкости. Это чуть более сложная задача. Впрочем, вывод формулы для подвижности читатель может опустить и сразу включиться в обсуждение полученного результата.

Частицы жидкости теряют импульс только при столкновении со стенкой трубы. Их столкновения между собой, казалось бы, можно не учитывать по тем же причинам, что и межэлектронные столкновения. Однако это не так. Как мы знаем, при столкновениях происходит перераспределение импульса между частицами. При стационарном ламинарном пуазейловом течении в соседних слоях жидкости скорости течения несколько отличаются: чем дальше от центра трубы, тем скорость меньше. Сила вязкого трения пропорциональна не скорости, как при столкновении электронов с препятствиями, а второй производной средней скорости по координате.

Действительно, на каждый слой жидкости действует сила трения (2) с двух сторон. Если бы производная  $dv/dx$  была постоянна, то эти силы были бы равны друг другу и полная сила равнялась бы нулю. Ненулевая результирующая сила возникает только в том случае, если  $dv/dx$  зависит от  $x$ , т.е. если вторая производная отлична от нуля.

Уравнение движения вязкой жидкости выглядит так:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (10)$$

Напомним, что  $\partial v/\partial t$  и т.д. – так называемые частные производные. Если функция зависит от нескольких переменных, например от  $t, x, y, z$ , то  $\partial v/\partial t$  обозначает производную по времени  $t$  при постоянных  $x, y, z$  и т.д.

Для простоты мы рассмотрим движение жидкости не по цилиндрической трубе, а между двумя бесконечными параллельными плоскостями, расстояние между которыми равно  $2d$ . Расход  $Q$  будем определять через квадрат со стороной  $2d$ . Пусть жидкость течет вдоль оси  $z$ , так что  $v = v(x, t)$  – это составляющая вектора скорости по оси  $z$ , а производная  $\partial p/\partial z$ , равная  $-\Delta p/L$ , есть постоянная величина. Плотность  $\rho$  запишем в виде  $\rho = Mn_i$ , где  $M$  – масса молекулы жидкости, а  $n_i$  – число молекул в единице объема. (Здесь и далее « $l$ » от английского liquid – жидкость.) Теперь уравнение (10) примет вид

$$M \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{n_i} \frac{\Delta p}{L} + \frac{\eta}{n_i} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Очевидно, что на каждую частицу жидкости действуют две силы: внешняя сила (первое слагаемое в правой части уравнения) и сила вязкого трения (второе слагаемое). Равенство механической силы силе трения в каждой точке между плоскостями ( $-d < x < d$ ) позволяет определить скорость  $v = v(x)$  стационарного ( $\partial v/\partial t = 0$ ) течения. Итак,

$$-\frac{\Delta p}{L} = \eta \frac{d^2 v}{dx^2}. \quad (11)$$

На стенках «трубы» (при  $x = -d$  и  $x = d$ ) скорость равна нулю. Легко проверить, что решением уравнения (11) служит простая функция

$$v(x) = \frac{\Delta p}{2L\eta} (d^2 - x^2). \quad (12)$$

Отсюда нетрудно найти среднюю скорость:

$$V = \frac{1}{3} \frac{\Delta p}{L} \frac{d^2}{\eta}. \quad (13)$$

и расход, равный в нашем случае  $(2d)^2 \rho V$ :

$$Q = \frac{4}{3} \frac{\Delta p}{L} \frac{d^4}{\eta}. \quad (14)$$

Разделив среднюю скорость  $V$  на величину внешней силы  $\frac{1}{n_i} \frac{\Delta p}{L} = \frac{M}{\rho} \frac{\Delta p}{L}$ , найдем подвижность  $U_l$  частицы жидкости.

Получается, что подвижность пуазейловой частицы жидкости равна

$$U_l = \frac{1}{3} \frac{d^2}{\eta} \frac{1}{M} \approx \frac{\tau_l}{M} \quad (\text{где } \tau_l = \frac{d^2}{\eta}). \quad (15)$$

Благодаря выбранным обозначениям, формула (15) похожа на формулу (9). В обоих случаях в знаменателе стоит масса отдельной частицы, коллектив которых ответствен за описываемое явление. В первом случае – за электропроводность, во втором случае – за вязкость. То, что подвижность обратно пропорциональна массе частицы, вполне естественно: чем частица тяжелее, тем медленнее она движется. Параметры  $\tau$  и  $\tau_l$ , имеющие размерность времени, определяются характером диссипативных процессов. Их природа совсем различная.

Параметр  $\tau$  есть время свободного пробега электрона металла или полупроводника. За это время в среднем каждый электрон с чем-то столкнется, в результате чего потеряет приобретаемый от электрического поля импульс. Так устанавливается стационарное состояние: средняя скорость электронов не возрастает и не убывает.

Теперь поговорим о параметре  $\tau_l$ . Вернемся к движению жидкости по трубе. Мы уже знаем, что вдали от стенок трубы частицы не могут потерять приобретенный от внешней силы импульс, для этого они должны столкнуться со стенкой. Но до стенки надо добраться. Не будь столкновений, вся жидкость, все ее частицы двигались бы с ускорением под действием внешней силы. Столкновения перемешивают частицы, они переходят из слоя в слой. Причина столкновений – тепловое движение молекул жидкости. Как правило, скорость теплового движения молекул значительно больше, чем скорость упорядоченного движения. Тепловое движение хаотично. Поэтому хаотичны и столкновения. В направлении от центра трубы к стенке никакая внешняя сила не действует. Частицы из слоев, далеких от стенок, попадают на стенку в результате многих столкновений после относительно длительного случайного блуждания. Так вот, время  $\tau_l$  есть время, которое частица в среднем тратит на то, чтобы в результате случайного блуждания из центра трубы добраться до стенки. Неудивительно, что  $\tau_l$  тем больше, чем больший путь надо преодолеть частице.

Итак, сравнивая разные явления, иногда обнаруживаешь неожиданное сходство, иногда – существенное различие, но всегда или по меньшей мере часто нечто проясняется. Тешу себя мыслью, что сравнение пуазейлового течения жидкости по трубе и похождения электрического тока по проводнику было небесполезно.

# Описанные четырёхугольники и ломаные

Н. БЕЛУХОВ, П. КОЖЕВНИКОВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ ВЫЯВИМ СВЯЗЬ МЕЖДУ НЕКОТОРЫМИ ЗАДАЧАМИ О КАСАТЕЛЬНЫХ К ОКРУЖНОСТЯМ И ЗАДАЧАМИ ОБ ОПИСАННЫХ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКАХ. В РЕШЕНИЯХ БУДЕМ ПОЛЬЗОВАТЬСЯ КЛАССИЧЕСКИМ КРИТЕРИЕМ:

(\*) *выпуклый четырёхугольник ABCD является описанным тогда и только тогда, когда  $AB + CD = BC + DA$ .* Также сформулируем теоремы, обобщающие критерий и рассматриваемые задачи.

## Серия задач

Начнем с такой задачи.

**Задача 1** (М2007). *Выпуклый четырёхугольник ABCD описан около окружности с центром I. На отрезках AI и IC выбраны точки M и N соответственно так, что  $\angle MBN = \frac{1}{2} \angle ABC$ . Докажите, что  $\angle MDN = \frac{1}{2} \angle ADC$ .*

Вероятно, проще всего решить эту задачу с использованием тригонометрии. Однако, сделав дополнительные построения, мы переформулируем задачу и затем решим ее геометрически.

Заметим, что равенство  $\angle MBN = \frac{1}{2} \angle ABC$  равносильно равенству  $\angle MBN = \angle MBA + \angle NBC$  (рис.1). Впишем в угол BAD окружность  $\omega_a$  с центром в M, а в угол BCD –

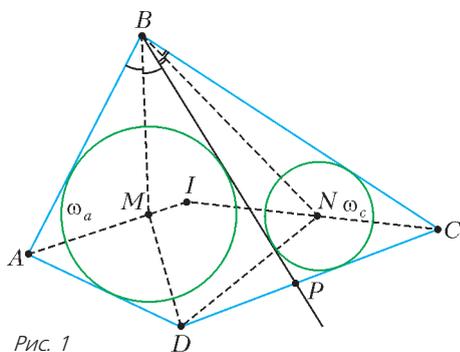


Рис. 1

окружность  $\omega_c$  с центром в N (ясно, что окружности  $\omega_a$  и  $\omega_c$  лежат внутри четырёхугольника ABCD). Через точку B проведем лучи BP и BP', являющиеся вторыми касательными к окружностям  $\omega_a$  и  $\omega_c$ . Так как  $\angle MBP = \angle MBA$  и  $\angle NBP' = \angle NBC$ , то равенство  $\angle MBN = \frac{1}{2} \angle ABC$  эквивалентно равенству  $\angle MBN = \angle MBP + \angle NBP'$ , т.е. совпадению BP и BP'. Итак, равенство  $\angle MBN = \frac{1}{2} \angle ABC$  означает, что B лежит на одной из общих (внутренних) касательных

к окружностям  $\omega_a$  и  $\omega_c$ . Точно так же равенство  $\angle MDN = \frac{1}{2} \angle ADC$  означает, что точка D лежит на общей касательной к окружностям  $\omega_a$  и  $\omega_c$ . Тем самым, мы приходим к следующей интересной переформулировке задачи 1.

**Задача 2.** *Внутри описанного четырёхугольника ABCD расположены окружности  $\omega_a$  и  $\omega_c$ , вписанные в углы BAD и BCD. Известно, что B лежит на одной из общих внутренних касательных к окружностям  $\omega_a$  и  $\omega_c$ . Докажите, что D также лежит на общей внутренней касательной к  $\omega_a$  и  $\omega_c$  (другой, если касательных две).*

**Решение.** Пусть P – такая точка, лежащая на одном из отрезков AD и DC, что BP – общая внутренняя касательная окружностей  $\omega_a$  и  $\omega_c$ . Считаем, что прямая BP отлична от прямой BD (иначе см. упражнение 1), и пусть для определенности P лежит на отрезке DC (рис.2). Проведем касательную DQ к окружности  $\omega_c$  (Q – точка на стороне BC).

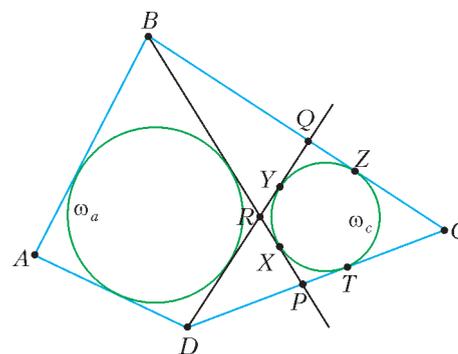


Рис. 2

Пусть R – точка пересечения прямых BP и DQ, а прямые BP, DQ, BC и DC касаются окружности  $\omega_c$  в точках X, Y, Z, T соответственно.

Так как четырёхугольник ABCD описанный, то

$$BA + DC = BC + DA, \text{ или } BA - DA = BC - DC.$$

Используя равенство отрезков касательных, проведенных из одной точки, имеем

$$BR - DR = BX - DY = BZ - DT = BC - DC.$$

Из равенств  $BA - DA = BC - DC$  и  $BR - DR = BC - DC$  следует

$$BR - DR = BA - DA, \text{ или } BR + DA = BA + DR.$$

Значит, четырёхугольник ABRD описанный, следовательно, DQ – общая касательная к  $\omega_a$  и  $\omega_c$ .

**Упражнение 1.** Докажите, что в описанном четырёхугольнике ABCD окружности, вписанные в треугольники BAD и BCD, касаются. (Иначе говоря, если в условии задачи 2 прямая BD – общая касательная к окружностям  $\omega_a$  и  $\omega_c$ , то  $\omega_a$  и  $\omega_c$  касаются друг друга.) Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

Из решения видно, что утверждение задачи 2 останется в силе, если четырёхугольник ABCD удовлетворяет равенству  $AB + CD = BC + DA$  и невыпуклый (т.е. один из плоских углов ABC, ADC больше  $180^\circ$ ), либо «вырожденный» (скажем, треугольник ABC с точкой D на стороне AC).

**Упражнение 2.** Докажите, что в треугольнике ABC точка D на стороне AC, для которой выполнено равенство  $AB + CD = BC + DA$ , – это точка касания вписанной окружности со стороной AC.

Применяя утверждение задачи 2 в случае «вырожденного» четырехугольника, можно получить решение следующих двух задач.

**Задача 3** (Всероссийская олимпиада, 2009 г.). *Окружность с центром  $I$  касается сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  неравностороннего треугольника  $ABC$  в точках  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  соответственно. Окружности  $\omega_b$  и  $\omega_c$  вписаны в четырехугольники  $BA_1C_1$  и  $CA_1B_1$  соответственно. Докажите, что общая внутренняя касательная к  $\omega_b$  и  $\omega_c$ , отличная от  $IA_1$ , проходит через точку  $A$ .*

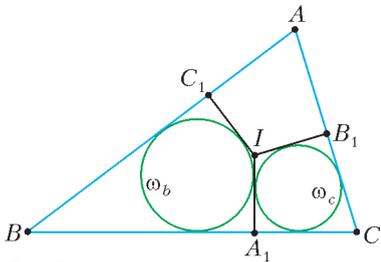


Рис. 3

как  $AB + A_1C = AC + A_1B$  (см. упражнение 2), то можно применить результат задачи 2 для «вырожденного» четырехугольника  $A_1BAC$ . Получаем, что вторая общая касательная окружностей  $\omega_b$  и  $\omega_c$  проходит через вершину  $A$ .

**Задача 4** (Устная олимпиада по геометрии, 2009 г.). *Фиксированы две непересекающиеся окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , одна их внешняя касательная  $l$  и одна их внутренняя касательная  $m$ . На прямой  $m$  выбирается точка  $X$ , а на прямой  $l$  строятся точки  $Y$  и  $Z$  так, что прямые  $XY$  и  $XZ$*

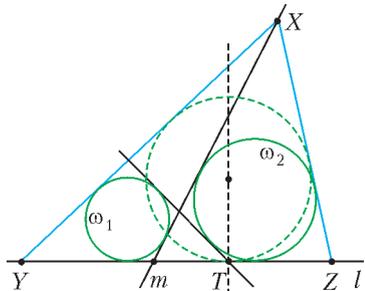


Рис. 4

*касаются  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно, а треугольник  $XYZ$  содержит окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Докажите, что центры окружностей, вписанных во всевозможные треугольники  $XYZ$ , лежат на одной прямой.*

**Решение.** По условию прямая  $m$  – общая внутренняя касательная к  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , проходящая через  $X$ . Пусть  $T$  – точка касания окружности, вписанной в треугольник  $XYZ$ , со стороной  $YZ$  (рис. 4). Применив результат задачи 2 для «вырожденного» четырехугольника  $T Y X Z$ , получаем, что вторая общая внутренняя касательная окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  проходит через  $T$ . Значит, точка  $T$  фиксированная, и центры окружностей, вписанных во всевозможные треугольники  $XYZ$ , лежат на прямой, перпендикулярной  $l$  и проходящей через точку  $T$ .

#### Окружности, вписанные в ломаные: условия существования

При решении задачи 2 фактически доказано следующее утверждение: если внутри невыпуклого четырехугольника  $BCDR$  существует окружность, касающаяся прямых  $BC$ ,  $CD$ ,  $DR$  и  $RB$ , то  $BR + DC = BC + DR$ . Оказывается, верно и обратное. Это видоизменение критерия (\*), известны и другие его вариации. Чтобы сформулировать их в виде одной теоремы, примем следующие соглашения. Будем коротко называть 4-ломаной  $(AC|BD)$  четверку отрезков  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  такую, что точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  различны и не лежат на одной прямой. (Так,  $(AC|BD)$ ,  $(CA|BD)$ ,  $(DB|CA)$  и т.д. – это разные обозначения одной и той же 4-ломаной.) Назовем 4-ломаную  $(AC|BD)$  *вырожденной*, если какие-то

три из точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  лежат на одной прямой. Скажем, что 4-ломаная  $(AC|BD)$  *центральная*, если  $ABCD$  – параллелограмм. Назовем невырожденную 4-ломаную  $(AC|BD)$  *описанной*, если существует окружность  $\omega$ , которой касаются прямые  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$ . В случае вырожденной 4-ломаной  $(AC|BD)$  (пусть, скажем,  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на одной прямой), потребуем дополнительно, чтобы касание прямой  $AB$  с  $\omega$  происходило в точке  $B$ . Окружность  $\omega$  будем называть *вписанной* в 4-ломаную (хотя это не всегда соответствует привычному понятию окружности, вписанной в многоугольник (см. примеры ниже)).

Оказывается, критерий существования окружности, вписанной в нецентральную 4-ломаную, можно сформулировать так:

(\*\*) *нецентральная 4-ломаная  $(AC|BD)$  является описанной тогда и только тогда, когда четыре отрезка  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $AD$  можно разбить на две пары отрезков с равными суммами длин.*

Доказывать критерий мы не будем, но идею доказательства обсудим ниже в конце этого раздела.

Теперь выделим три способа вписать окружность в 4-ломаную  $(AC|BD)$ .

Для начала заметим, что если окружность касается (не совпадающих) прямых  $XY$  и  $YZ$ , то ее центр лежит на одной из двух прямых: на внутренней или на внешней биссектрисе угла  $XYZ$ . Чтобы было удобнее работать с вырожденными 4-ломаными, также будем говорить о биссектрисах нулевого и развернутого угла в следующем смысле. Пусть точки  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  лежат на одной прямой, причем  $Y$  лежит между  $X$  и  $Z$ . Если окружность касается прямой  $XY$  в точке  $X$  ( $Y$ ), то ее центр лежит на перпендикуляре  $l_x$  ( $l_y$ ) к прямой  $XY$ , проведенном через  $X$  ( $Y$ ). Поэтому можно считать прямую  $l_x$  внешней биссектрисой нулевого угла  $YXZ$ , а прямую  $l_y$  – внутренней биссектрисой развернутого угла  $XYZ$ .

Скажем, что окружность  $\omega$  вписана в 4-ломаную  $(AC|BD)$  *внутренним образом*, если ее центр лежит на пересечении внутренних биссектрис углов  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $DAB$ ;

*(AC)-внешним образом*, если ее центр лежит на пересечении внутренних биссектрис углов  $ABC$ ,  $CDA$  и внешних биссектрис углов  $BCD$ ,  $DAB$ ;

*(BD)-внешним образом*, если ее центр лежит на пересечении внешних биссектрис углов  $ABC$ ,  $CDA$  и внутренних биссектрис углов  $BCD$ ,  $DAB$ .

Например, на рисунке 2 окружность  $\omega_c$  вписана в 4-ломаную  $(BD|CR)$  внутренним образом. Другой пример: если невписанная окружность  $\omega_a$  треугольника  $ABC$  касается стороны  $BC$  в точке  $A'$ , то окружность  $\omega_a$  вписана в (вырожденную) 4-ломаную  $(AA'|BC)$  *(BC)-внешним образом*.

#### Упражнения

**3.** Покажите, что если  $\omega$  вписана в 4-ломаную  $(AC|BD)$ , то она вписана одним из трех указанных выше способов. (Например, центр  $\omega$  не может лежать одновременно на внутренней биссектрисе угла  $ABC$  и на внешней биссектрисе угла  $CDA$ .)

**4.** Пусть окружность  $\omega$  вписана в 4-ломаную  $(AC|BD)$ . Покажите, что она вписана *внутренним образом* тогда и только тогда, когда замкнутая ломаная  $ABCD$  несамопересекающаяся и  $\omega$  лежит внутри четырехугольника (возможно, невыпуклого)  $ABCD$ .

Справедливо следующее усиление критерия (\*\*).

**Теорема 1.** *4-ломаная  $(AC|BD)$  является описанной*

i) внутренним образом тогда и только тогда, когда

$$AB + CD = BC + DA; \quad (1)$$

ii) (AC)-внешним образом тогда и только тогда, когда она не центральная и

$$AB + DA = BC + CD; \quad (2)$$

iii) (BD)-внешним образом тогда и только тогда, когда она не центральная и

$$AB + BC = CD + DA. \quad (3)$$

Подробного доказательства этой теоремы мы здесь не приводим, ограничиваясь следующими замечаниями. Из того, что 4-ломаная описанная, нетрудно получить одно из соотношений (1), (2), (3), используя равенства отрезков касательных (аналогично тому, как это было проделано в решении задачи 2). Доказать же то, что ломаная описана, исходя из соотношений, труднее. Это можно сделать аналогично доказательству критерия (\*), рассмотрев разные случаи расположения 4-ломаной. Идея геометрического доказательства, основанного на свойствах коник, описана в последней части этой статьи.

**Упражнение 5.** Докажите, что:

- а) существует не более двух окружностей, вписанных в 4-ломаную;
- б) в 4-ломаную можно вписать две окружности тогда и только тогда, когда она не центральная и имеет ось симметрии.

### Теорема транзитивности

Теперь схему решения задачи 2 можно описать так: происходит перенос (или *транзит*) условия существования вписанной окружности с двух 4-ломаных (BD|AC) и (BD|CR) на третью 4-ломаную (BD|RA). Та же схема работает и в такой более общей ситуации.

**Теорема 2 (теорема транзитивности).** Пусть даны 4-ломаные (AB|XY), (AB|YZ) и (AB|ZX). Тогда

- i) если для двух из них существуют окружности, вписанные внутренним образом, то и для третьей – тоже;
- ii) если для (AB|XY) и (AB|YZ) существуют окружности, вписанные соответственно (XY)-внешним и (YZ)-внешним образом, и 4-ломаная (AB|ZX) не центральная, то для нее существует окружность, вписанная (ZX)-внешним образом;
- iii) если для (AB|XY) и (AB|YZ) существуют окружности, вписанные (AB)-внешним образом, то для (AB|ZX) существует окружность, вписанная внутренним образом;
- iii') если для (AB|XY) существует окружность, вписанная (AB)-внешним образом, для (AB|ZX) существует окружность, вписанная внутренним образом, и 4-ломаная (AB|YZ) не центральная, то для нее существует окружность, вписанная (AB)-внешним образом.

**Доказательство.** Докажем, например, утверждение (ii).

Если в ломаные (AB|XY) и (AB|YZ) можно вписать окружности соответственно (XY)-внешним и (YZ)-внешним образом, то по теореме 1 имеем

$$AX + BX = AY + BY, \quad AY + BY = AZ + BZ.$$

Отсюда

$$AX + BX = AZ + BZ,$$

и получаем (снова по теореме 1), что в ломаную (AB|ZX) можно вписать окружность (ZX)-внешним образом.

**Упражнение 6.** Докажите другие утверждения теоремы 2.

Следующая задача, как и предыдущие, оказывается следствием теоремы 2.

**Задача 5 (M1025).** Две прямые, проходящие через точки пересечения пар противоположных сторон выпуклого четырехугольника, делят его на четыре меньших четырехугольника. Докажите, что если два меньших четырехугольника, не имеющих общей стороны, описанные, то и исходный четырехугольник описанный.

**Решение.** Возможны два случая расположения четырехугольников, про которые известно, что они описанные (рис.5 и 6).

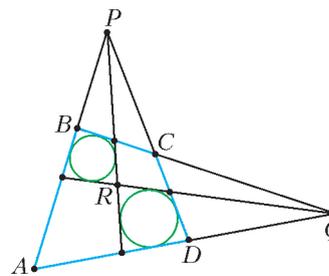


Рис. 5

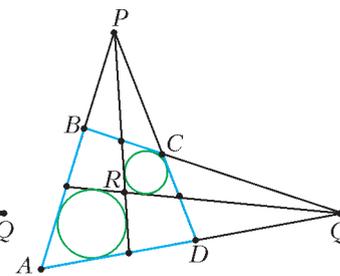


Рис. 6

В первом случае 4-ломаные (PQ|BR) и (PQ|RD) являются описанными соответственно (BR)-внешним и (RD)-внешним образом, значит, по теореме 2, 4-ломаная (PQ|DB) является описанной (DB)-внешним образом, т.е. четырехугольник ABCD описанный.

Во втором случае 4-ломаные (PQ|AR) и (PQ|RC) являются описанными внутренним образом, следовательно, 4-ломаная (PQ|CA) также является описанной внутренним образом, откуда следует требуемое.

### Упражнения

7. а) Сформулируйте и докажите аналоги утверждений задачи 4 в том случае, когда треугольник XYZ не обязательно содержит окружности.

б) Сформулируйте аналогичную задачу для точки X на внешней касательной и точек Y и Z на внутренней.

8. Сформулируйте и докажите еще одну теорему транзитивности про три 4-ломаные (AB|CD), (AC|BD) и (AD|BC). В частности, получите решение такой задачи:

На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты соответственно точки A', B', C' так, что отрезки AA', BB', CC' пересекаются в одной точке D. Докажите, что если два из четырехугольников AB'DC', BC'DA', CA'DB' описанные, то третий также является описанным.

### Описанные ломаные с вершиной... на бесконечности

Если вершина D 4-ломаной (AC|BD) расположена далеко от остальных, то лучи AD и CD «почти сонаправленные». А что если в самом деле сделать их сонаправленными?

Итак, давайте называть 4<sub>∞</sub>-ломаной (BD<sub>∞</sub>|AC) объединение отрезков AB, BC и сонаправленных, но не лежащих на одной прямой, лучей AD' и CD'' (точки A, B, C предполагаются различными; рис.7). Окружность, вписанная в 4<sub>∞</sub>-ломаную (BD<sub>∞</sub>|AC), должна одновременно касаться прямых AB и BC и быть вписанной в полосу между параллельными пря-

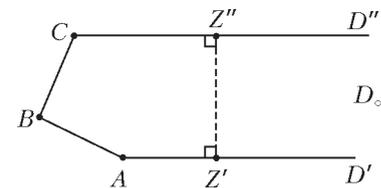


Рис. 7

мыми  $AD'$  и  $CD''$ . Как и раньше, принимаем дополнительное соглашение для вырожденных  $4_\infty$ -ломанных: например, если прямые  $AD'$  и  $AB$  совпадают, то вписанная окружность должна касаться прямой  $AB$  в точке  $A$ .

Можно выделить два способа вписать окружность в  $4_\infty$ -ломаную  $(AC|BD_\infty)$ : внутренним и  $(AC)$ -внешним образом (или просто внешним образом). Придадим смысл выражению  $AD_\infty - CD_\infty$  и сформулируем теорему, аналогичную теореме 1. Положим  $AD_\infty - CD_\infty = c$ , если на лучах  $AD'$  и  $CD''$  найдены соответственно точки  $Z'$  и  $Z''$  такие, что  $Z'Z'' \perp AD'$  и  $AZ' - CZ'' = c$ .

**Упражнение 9.** а) Покажите, что разность  $AD_\infty - CD_\infty$  определена корректно, т.е. не зависит от выбора на лучах точек  $Z'$  и  $Z''$  с условием  $Z'Z'' \perp AD'$ .

б) Для трех сонаправленных лучей  $AD'$ ,  $CD''$  и  $ED''$  докажите равенство  $(AD_\infty - CD_\infty) + (CD_\infty - ED_\infty) = AD_\infty - ED_\infty$ .

**Теорема 1'.**  $4_\infty$ -ломаная  $(BD_\infty|AC)$  является описанной тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух равенств

$$AD_\infty - CD_\infty = AB - CB, \tag{1'}$$

$$AD_\infty - CD_\infty = CB - AB, \tag{2'}$$

причем в первом случае существует окружность, вписанная внутренним образом, а во втором случае – внешним образом.

Попробуйте доказать эту теорему самостоятельно. В конце статьи будет предложена идея доказательства, использующего коники.

**Упражнение 10.** Определите ломаную с двумя вершинами «на бесконечности». Как для нее будет звучать аналог теоремы 1'?

**Теорема 2'.** Пусть даны  $4_\infty$ -ломанные  $(AB_\infty|XY)$ ,  $(AB_\infty|YZ)$  и  $(AB_\infty|ZX)$ . Тогда

i) если для двух из них существуют окружности, вписанные внутренним образом, то и для третьей – тоже;

ii) если для двух из них существуют окружности, вписанные внешним образом, то и для третьей – тоже.

**Доказательство.** i) Пусть, скажем, в  $4_\infty$ -ломаные  $(AB_\infty|XY)$ ,  $(AB_\infty|YZ)$  можно вписать окружности внутренним образом. Тогда по теореме 1' имеем

$$XB_\infty - YB_\infty = XA - YA, \quad YB_\infty - ZB_\infty = YA - ZA.$$

Сложив эти равенства, получаем (с учетом результата упражнения 9,б)  $XB_\infty - ZB_\infty = XA - ZA$ , значит (снова по теореме 1'), для  $4_\infty$ -ломаной  $(AB_\infty|ZX)$  существует окружность, вписанная внутренним образом.

Случай (ii) разбирается аналогично.

К ситуации, описанной в теореме 2', можно свести следующую задачу.

**Задача 6** (M1293) В угол с вершиной  $O$  вписаны две непересекающиеся окружности. Треугольник  $ABC$  расположен между ними так, что его вершины лежат на сторонах угла, а равные стороны  $AB$  и  $AC$  касаются соответствующих окружностей. Докажите, что сумма радиусов окружностей равна высоте треугольника, опущенной из вершины  $A$ .

**Решение.** Пусть, для определенности, точка  $B$  лежит между точками  $O$  и  $C$ , и  $\omega_1, \omega_2$  – окружности, соответственно, вписанная в треугольник  $OAB$  и невписанная для треугольника  $OAC$  (рис.8). Отразив треугольник  $OAB$  симметрично относительно точки  $A$ , получим треугольник  $AO'B'$  с вписанной окружностью  $\omega'_1$ , равной  $\omega_1$ . Так как  $AB = AC = AB'$ , то  $B'C \perp BC$ . Проведем вторую касатель-

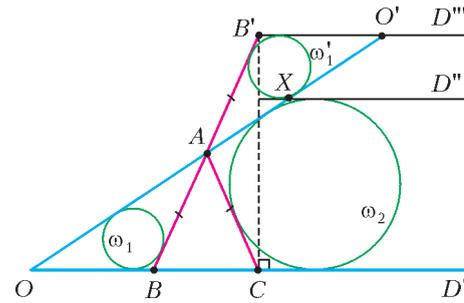


Рис. 8

ную, параллельную  $B'O'$ , к окружности  $\omega'_1$ , пусть она пересекает  $AO'$  в точке  $X$ . Пусть  $XD''$  и  $B'D''$  – лучи, сонаправленные с лучом  $OC = OD'$ . Рассмотрим три  $4_\infty$ -ломанные  $(AD_\infty|CB')$ ,  $(AD_\infty|B'X)$  и  $(AD_\infty|XC)$ . Первая из них симметрична относительно биссектрисы угла  $CAB'$ , поэтому для нее существует окружность, вписанная внутренним образом. По построению,  $\omega'_1$  – окружность, вписанная в  $(AD_\infty|B'X)$ . Значит, по теореме 2', для  $4_\infty$ -ломаной  $(AD_\infty|XC)$  существует окружность, вписанная внутренним образом. Но эта окружность должна совпадать с  $\omega_2$ . Получаем, что  $\omega_2$  также касается прямой  $XD''$ , поэтому сумма диаметров окружностей  $\omega_2$  и  $\omega'_1$  равна расстоянию между прямыми  $OB$  и  $O'B'$ , т.е. удвоенной высоте треугольника  $ABC$ .

**Упражнение 11.** Сформулируйте и докажите теорему 2 в случае, когда одна из точек  $X, Y, Z$  бесконечно удаленная.

Как мы видели, задачи 1 – 6 (и многие другие) с такими разными геометрическими сюжетами – близкие родственники: их предком можно считать теорему транзитивности.

### Описанные ломаные и... коники

В заключение отметим связь между описанными ломаными и кониками – эллипсом, гиперболой и параболой.

Пусть на плоскости даны точки  $F_1$  и  $F_2$  на расстоянии  $F_1F_2 = l$  и прямая  $d$ , не проходящая через  $F_1$ . Как известно (см., например, [2]), множеством точек  $M$  таких, что:

$F_1M + F_2M = c$ , где  $c > l$  – фиксированное число, является эллипс с фокусами  $F_1$  и  $F_2$ ;

$F_1M - F_2M = c$ , где  $c \in (-l; l)$ , является при  $c \neq 0$  ветвь гиперболы, а при  $c = 0$  – серединный перпендикуляр к отрезку  $F_1F_2$ ;

$F_1M$  равно расстоянию от  $M$  до прямой  $d$ , является парабола с фокусом  $F_1$  и осью, перпендикулярной  $d$ .

Эллипс (гипербола) однозначно определяется фокусами и точкой на нем (ней). Параболу можно однозначно восстановить по точке на ней, фокусу и направлению оси (здесь под направлением оси мы понимаем луч, параллельный оси симметрии параболы и не пересекающий параболу).

Теперь посмотрим, что означают равенства из условий теорем 1 и 1' (возможные случаи приведены на рисунке 9).

Равенство (1) эквивалентно тому, что точки  $B$  и  $D$  лежат на одной ветви гиперболы с фокусами  $A$  и  $C$  (или на серединном перпендикуляре к  $AC$ ), а также аналогичному условию с заменой пары  $A, C$  на пару  $B, D$ ;

(2) для нецентральной  $4$ -ломаной означает, что точки  $A$  и  $C$  лежат на одном эллипсе с фокусами  $B$  и  $D$  или что точки  $B$  и  $D$  лежат на разных ветвях одной гиперболы с фокусами  $A$  и  $C$ ;

(3) – аналогично (2) с заменой пары  $A, C$  на пару  $B, D$ ;

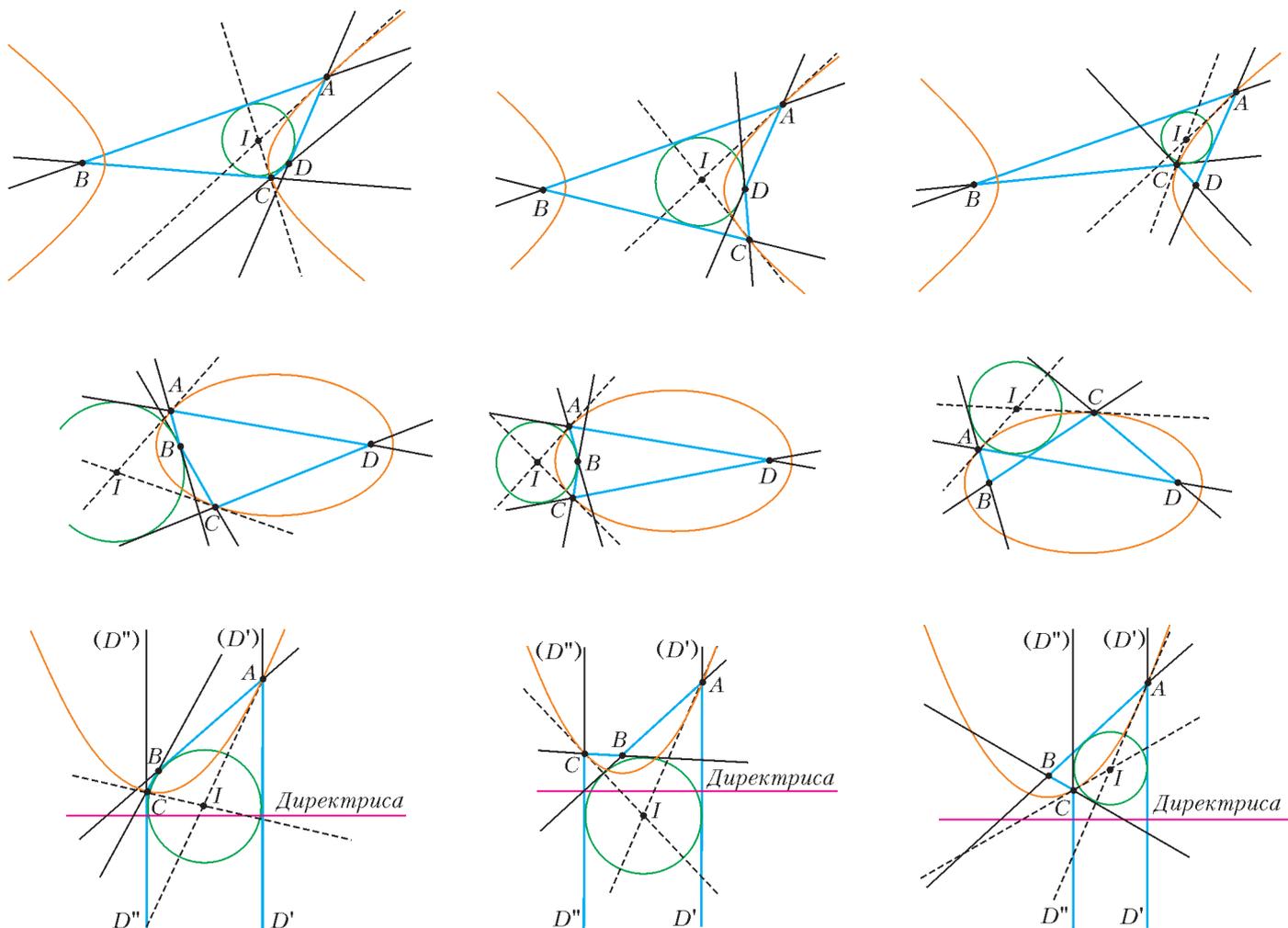


Рис. 9

(1') (соответственно (2')) означает, что точки  $A$  и  $C$  лежат на одной параболы с фокусом  $B$  и осью, противоположно направленной (для (2') – сонаправленной) лучу  $AD'$ .

С помощью этих соображений и свойств коник можно доказать существование вписанной окружности в теоремах 1 и 1'. Возьмем, например, утверждение (ii) теоремы 1. Точки  $A$  и  $C$  лежат на одном эллипсе с фокусами  $B$  и  $D$ . По условию, 4-ломаная  $(AC|BD)$  не центральная, поэтому точки  $A$  и  $C$  – не диаметрально противоположные точки эллипса. Касательные к эллипсу, проведенные в точках  $A$  и  $C$ , пересекаются в некоторой точке  $I$ . Оказывается, что  $I$  равноудалена от прямых  $AB, BC, CD, DA$ , т.е. 4-ломаная  $(AC|BD)$  описана вокруг окружности с центром  $I$ . Действительно, в силу оптического свойства эллипса (см., например, [3]),  $I$  лежит на внешних биссектрисах углов  $BAD$  и  $BCD$  и, кроме того (см. например, задачу 1.4 из книги [1]), прямая  $BI$  – биссектриса угла  $ABC$ .

Похожие рассуждения можно провести с использованием гиперболы и параболы – всякий раз центр искомой окружности находится на пересечении соответствующих касательных к конике (см. рис.9).

Ситуацию, происходящую в теоремах транзитивности 2 и 2', теперь можно трактовать таким образом:

в утверждении (i) теоремы 2 точки  $X, Y, Z$  лежат на одной ветви гиперболы с фокусами  $A, B$  или на среднем перпендикуляре к отрезку  $AB$ ;

в утверждении (ii) теоремы 2 точки  $X, Y, Z$  лежат на одном эллипсе с фокусами  $A, B$ ;

в утверждении (iii) теоремы 2 точки  $X, Y, Z$  лежат на одной гиперболы с фокусами  $A, B$ , причем две из них – на одной ветви, а одна – на другой;

в теореме 2' точки  $X, Y, Z$  лежат на одной параболы с фокусом  $A$  и осью, противоположно направленной – в случае (i) или сонаправленной – в случае (ii), с лучом  $XB'$ .

**Упражнения**

12. Дана  $4_\infty$ -ломаная  $(AC|BD_\infty)$ , в которой  $AB \neq BC$ . Докажите, что она описана тогда и только тогда, когда  $AD'$  параллельна одной из асимптот гиперболы с фокусами  $A$  и  $C$ , проходящей через  $B$ .

13. Докажите, что центр окружности, вписанной в вырожденную 4-ломаную или вырожденную  $4_\infty$ -ломаную, лежит на директрисе (определение директрисы см., например, в [2]) соответствующей коники.

**Список литературы**

1. Акопян А.В., Заславский А.А. *Геометрические свойства кривых второго порядка*. – М.: МЦНМО, 2007.
2. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л. *Прямые и кривые* (издание 6-е, стереотипное). – М.: МЦНМО, 2006.
3. Протасов В.Ю. *Максимумы и минимумы в геометрии*. – М.: МЦНМО, 2005.

# Динамика движения по окружности

А. ЧЕРНОУЦАН

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ РАССМОТРИМ НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ НА динамику движения тел по окружности. Теоретическим основанием для решения таких задач служит следующее кинематическое утверждение: если материальная точка движется со скоростью  $v$  по окружности радиусом  $R$ , то проекция ускорения точки на ось  $x$ , проведенную от точки к центру окружности, равна

$$a_x = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R,$$

где  $\omega = v/R$  – угловая скорость точки в данный момент времени. Эту проекцию ускорения называют *нормальным* (перпендикулярным к скорости) или *центростремительным* ускорением. Если скорость точки постоянна, то в каждый момент времени вектор ускорения направлен к центру окружности, т.е. нормальное ускорение равно полному ускорению. Такое же выражение для нормального ускорения оказывается верным для движения материальной точки по *любой* криволинейной траектории, только под  $R$  в этом случае подразумевают *радиус кривизны* траектории, т.е. радиус окружности, наиболее близко примыкающей к траектории в данной точке.

Чтобы учесть эту информацию при решении задач динамики, надо одну из осей, на которые проецируется уравнение второго закона Ньютона, направить от движущейся точки к центру окружности (по радиусу). Выбор других осей (если они нужны) диктуется удобством решения.

**Важное предостережение:** силы, стоящие в уравнении второго закона Ньютона для тела, движущегося по окружности, должны быть такие же, как и в динамике прямолинейного движения. Это сила тяжести (или всемирного тяготения), сила упругости, сила нормальной реакции опоры, сила натяжения нити, сила трения покоя или скольжения и т.д. Вводить какие-либо специальные силы, типа центростремительной или центробежной силы, не следует. (Напомним, что центробежной силой называют одну из сил инерции, возникающих при переходе в неинерциальную вращающуюся систему отсчета. При решении задач в инерциальной системе отсчета это понятие не имеет смысла.)

**Задача 1.** Какую минимальную скорость должен развить автомобиль массой  $m = 2000$  кг, чтобы благополучно проехать по выпуклому мосту, имеющему вид дуги окружности радиусом  $R = 100$  м, если мост выдерживает нагрузку не более  $F = 18000$  Н?

**Решение.** Выясним, в какой точке дуги сила давления на мост будет самой большой. Для этого вычислим эту силу в точке, направление на которую из центра окружности составляет угол  $\alpha$  с вертикалью (рис.1). По третьему закону

Ньютона сила давления  $F$  автомобиля на мост равна силе нормальной реакции  $N$  моста на автомобиль. Направим ось  $x$  от автомобиля к центру окружности и запишем второй закон Ньютона в проекции на эту ось:

$$mg \cos \alpha - N = \frac{mv^2}{R},$$

$$\text{т.е. } N = mg \cos \alpha - \frac{mv^2}{R}. \quad (1)$$

Сила тяги и сила сопротивления, действующие на автомобиль в этой точке, перпендикулярны оси  $x$  и поэтому не входят в уравнение (и не изображены на рисунке). Видно, что сила давления максимальна при  $\alpha = 0$ , т.е. в верхней точке моста. При минимально допустимой скорости сила давления достигает критического значения  $F$  именно в этой единственной точке. Получаем, что минимально допустимая скорость равна

$$v = \sqrt{\left(g - \frac{F}{m}\right)R} = 10 \text{ м/с}.$$

**Задача 2.** Дорога, ведущая через холм, имеет вид наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$ , плавно переходящей в дугу окружности радиусом  $R$  (рис.2). Известно, что на самой вершине холма имеется опасная выбоина. С какой минимальной скоростью должен ехать автомобиль, чтобы преодолеть холм не коснувшись его вершины?

**Решение.** Первый подход к решению задачи обычно состоит в том, чтобы найти такую скорость  $v_1$ , при которой автомобиль проходит всю дугу, отрываясь от полотна дороги только в одной верхней точке  $A$ . Для этого записывают второй закон Ньютона для верхней точки в проекции на вертикальную ось  $AO$ , проходящую через центр окружности:

$$mg = \frac{mv_1^2}{R}, \text{ т.е. } v_1 = \sqrt{gR}. \quad (2)$$

Однако, как хорошо видно из уравнения (1), сила нормальной реакции в верхней точке минимальна. Тогда при скорости  $v_1$ , при которой сила  $N$  в верхней точке равна нулю, в остальных точках дуги (где  $\alpha \neq 0$ ) сила отрицательна! Это значит, что автомобиль оторвется от дороги не в верхней точке, а в точке  $B$  – сразу же после того, как перейдет с наклонной плоскости на криволинейный участок дороги.

Выясним, при какой минимальной скорости  $v_2$  автомобиль в точке  $B$  оторвется от дороги (т.е.  $N$  обратится в ноль). Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось  $BO$ :

$$mg \cos \alpha = \frac{mv_2^2}{R}, \text{ т.е. } v_2 = \sqrt{gR \cos \alpha}. \quad (3)$$

Но при этой скорости автомобиль потеряет контакт с дорогой только в одной точке  $B$ , после чего проедет всю дугу с  $N > 0$  ( $N$  возрастает при приближении к верхней точке).

Следовательно, надо найти такую скорость  $v_3 > v_2$ , при которой автомобиль, оторвавшись от дороги в точке  $B$ , свободно полетит под углом  $\alpha$  к горизонту и приземлится в

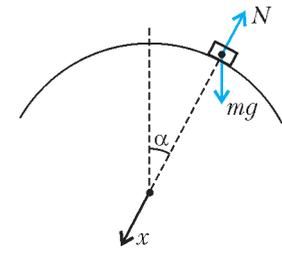


Рис. 1

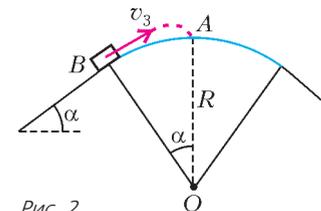


Рис. 2

точке  $A$  (см. рис.2) – точнее, чуть правее этой точки, чтобы не попасть в выбоину. Запишем уравнения кинематики:

$$R \sin \alpha = (v_3 \cos \alpha)t,$$

$$R(1 - \cos \alpha) = (v_3 \sin \alpha)t - \frac{gt^2}{2}.$$

После преобразований получим

$$v_3 = \sqrt{gR \frac{1 + \cos \alpha}{2 \cos \alpha}}.$$

Отметим, что эта скорость больше  $v_1$ .

**Задача 3.** Тело брошено под углом к горизонту. Как меняется радиус кривизны траектории во время полета?

**Решение.** Чем дальше находится тело от верхней точки траектории, т.е. чем меньше его высота, тем больше радиус кривизны. Действительно, скорость тела по мере удаления от верхней точки возрастает, а нормальное ускорение  $a_n = g \sin \alpha$  ( $\alpha$  – угол между  $\vec{v}$  и  $\vec{g}$ ) уменьшается, следовательно,  $R = v^2/a_n$  увеличивается.

**Задача 4.** Небольшое тело массой  $M = 190$  г лежит на вершине гладкой полусферы радиусом  $R = 90$  см. В тело попадает пуля массой  $m = 10$  г, летящая горизонтально, и застревает в нем. При какой минимальной скорости пули тело после этого сразу оторвется от поверхности полусферы?

**Решение.** Для того чтобы составное тело (тело с застрявшей в нем пулей) сразу и навсегда оторвалось от сферической поверхности, достаточно, чтобы радиус кривизны его траектории в верхней точке превышал радиус сферы. Дело в том, что при дальнейшем свободном полете тела радиус кривизны его траектории возрастает (см. задачу 3), а значит, траектория проходит вне сферической поверхности.

Запишем второй закон Ньютона для составного тела в верхней точке:

$$(m + M)g = (m + M) \frac{v^2}{R},$$

после чего с помощью закона сохранения импульса

$$mv_1 = (m + M)v$$

найдем скорость пули перед ударом:

$$v_1 = \frac{m + M}{m} \sqrt{gR} = 60 \text{ м/с}.$$

**Задача 5.** Самолет, летящий со скоростью  $v = 540$  км/ч, наклоняется при повороте на угол  $\alpha$ , тангенс которого равен 0,3. Чему равен радиус поворота?

**Решение.** На самолет при полете действуют сила тяги двигателей, сила лобового сопротивления, сила тяжести и подъемная сила, направленная перпендикулярно плоскости крыльев. Из них только подъемная сила может иметь горизонтальную составляющую, перпендикулярную плоскости полета, наличие которой необходимо для поворота в горизонтальной плоскости. Достигается это наклоном плоскости крыльев вокруг продольной оси самолета. Если плоскость крыльев повернется на угол  $\alpha$ , то на такой же угол отклонится от вертикали подъемная сила  $\vec{N}$  (рис.3; вид спереди). Запишем второй закон Ньютона в проек-

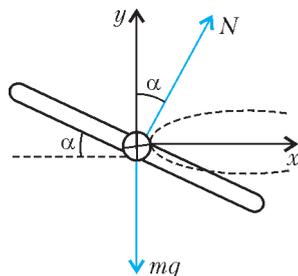


Рис. 3

циях на горизонтальную ось  $x$ , направленную к центру окружности, и на вертикальную ось  $y$ :

$$N \sin \alpha = m \frac{v^2}{R},$$

$$N \cos \alpha - mg = 0. \tag{4}$$

Исключая силу  $N$ , получим

$$R = \frac{v^2}{g \tan \alpha} = 7500 \text{ м}.$$

Заметим, что при повороте надо обеспечить некоторое увеличение подъемной силы (от  $mg$  до  $mg/\cos \alpha$ ), иначе самолет начнет опускаться. Это достигается специальным изменением формы крыльев.

**Задача 6.** С какой максимальной скоростью может проходить автомобиль поворот дороги с радиусом закругления  $R = 100$  м, если коэффициент трения между шинами автомобиля и дорогой  $\mu = 0,4$ ?

**Решение.** Автомобиль благополучно (в управляемом режиме) проходит поворот в том случае, если не возникает проскальзывания колес, т.е. действующая на нижнюю точку колеса сила трения покоя удовлетворяет неравенству  $F_{\text{тр}} \leq \mu N$ . При максимально допустимой скорости (движение на грани проскальзывания) это неравенство превращается в равенство. Если считать, что сила трения покоя – единственная горизонтальная сила, то она должна быть направлена по ускорению, т.е. к центру окружности. Получаем (рис.4,а)

$$F_{\text{тр}} = \frac{mv^2}{R},$$

$$N - mg = 0.$$

Выразив отсюда  $F_{\text{тр}}$  и  $N$  и подставив в условие начала проскальзывания  $F_{\text{тр}} = \mu N$ , найдем

$$v = \sqrt{\mu g R} = 20 \text{ м/с}.$$

Отметим, что если принять во внимание наличие силы сопротивления движению, направленной против скорости (эта сила отвечает за медленное торможение автомобиля при

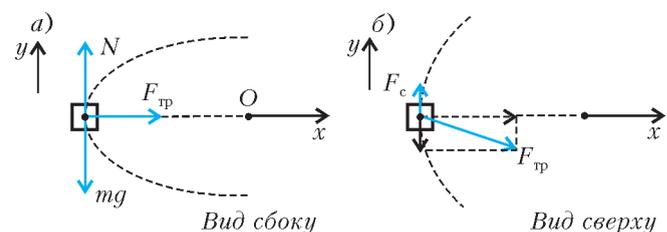


Рис. 4

движении по инерции – при выключенном двигателе и отключенных тормозах), то ответ несколько меняется. Для обеспечения равномерного движения на повороте часть силы трения покоя должна быть направлена вперед, создавая силу тяги, равную силе сопротивления движения. Тогда полная сила трения, равная при максимально допустимой скорости  $\mu mg$ , вычисляется по теореме Пифагора (рис.4,б):

$$(\mu mg)^2 = \left( \frac{mv^2}{R} \right)^2 + F_c^2.$$

Если, к примеру, для скорости порядка 20 м/с сила сопротивления  $F_c = 0,2\mu mg$  (что означает, что при нажатии на тормоз ускорение торможения возрастет примерно в 5 раз по

сравнению с движением по инерции), то для максимальной скорости получим  $v \approx 19,8$  м/с. Видим, что учет даже не столь уж маленькой силы сопротивления приводит к ничтожной поправке к максимально допустимой скорости.

**Задача 7.** Мотоциклист производит поворот на наклонном треке. Найдите максимальную и минимальную скорости прохождения поворота, если радиус поворота  $R = 30$  м, коэффициент трения  $\mu = 0,5$ , а угол наклона трека к горизонту  $\alpha = 45^\circ$ . Поворот надо пройти без проскальзывания колес по треку.

**Решение.** Дорогу (трек) делают наклоненной в сторону поворота для того, чтобы сила нормальной реакции имела проекцию в направлении центра окружности. Это позволяет уменьшить боковую силу трения покоя (см. задачу 6) и опасность проскальзывания колес. При некоторой оптимальной для данного поворота скорости  $v_0$  сила трения вообще обращается в ноль. Это значит, что боковое проскальзывание колес не возникает даже при существенном уменьшении коэффициента трения (например, за счет обледенения полотна дороги). Уравнения для нахождения  $v_0$  имеют вид (рис.5, а)

$$N \sin \alpha = \frac{mv_0^2}{R},$$

$$N \cos \alpha - mg = 0.$$

Отсюда получаем

$$v_0 = \sqrt{gR \operatorname{tg} \alpha} \approx 17,3 \text{ м/с}.$$

При скоростях  $v > v_0$  возникает сила трения покоя, направленная вдоль склона вниз (рис.5, б), а при достижении

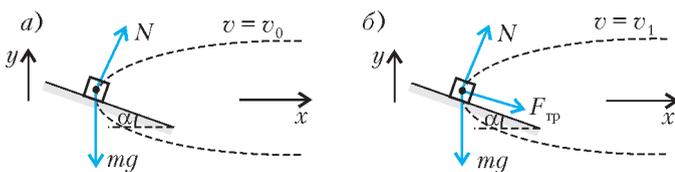


Рис. 5

максимально допустимой скорости  $v_1$  начинается боковое скольжение колес наружу, вверх по склону. Начало скольжения описывается уравнениями

$$N \sin \alpha + F_{\text{тр}} \cos \alpha = \frac{mv_1^2}{R},$$

$$N \cos \alpha - F_{\text{тр}} \sin \alpha - mg = 0,$$

$$F_{\text{тр}} = \mu N,$$

откуда найдем

$$v_1 = \sqrt{gR \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}} = \sqrt{gR \frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}} = 30 \text{ м/с}.$$

При скоростях  $v < v_0$  возникает боковая сила трения покоя, направленная вверх по склону, а при достижении минимально допустимой скорости  $v_2$  мотоциклист начинает соскальзывать вниз по склону. Меняя знаки перед силой трения в написанных выше уравнениях и решая их, получим

$$v_2 = \sqrt{gR \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}} = 10 \text{ м/с}.$$

При  $\operatorname{tg} \alpha < \mu$  соскальзывания вниз не происходит при любой сколь угодно малой скорости, а при  $\alpha = 0$  задача о проскальзывании наружу переходит в задачу 6. При  $\operatorname{tg} \alpha > 1/\mu$  проскальзывания наружу не происходит ни при какой сколь угодно большой скорости. Если же при фиксированном угле

$\alpha$  устремить к нулю коэффициент трения, то обе скорости  $v_1$  и  $v_2$  приближаются с двух сторон к оптимальной скорости  $v_0$ .

**Задача 8.** На внутренней поверхности сферы радиусом  $R$  находится маленькая шайба. До какой угловой скорости можно раскрутить сферу вокруг вертикальной оси, чтобы шайба не проскальзывала, находясь на расстоянии  $h$  ниже ее центра? Коэффициент трения между шайбой и сферой  $\mu$ .

**Решение.** Аналогично предыдущей задаче, надо найти диапазон угловых скоростей  $\omega_2 < \omega < \omega_1$ , при которых шайба не проскальзывает ни вниз, ни вверх. Для начала проскальзывания наружу (вверх) уравнения имеют вид (рис. 6)

$$N \sin \alpha + F_{\text{тр}} \cos \alpha = m\omega_1^2 (R \sin \alpha),$$

$$N \cos \alpha - F_{\text{тр}} \sin \alpha - mg = 0,$$

$$F_{\text{тр}} = \mu N,$$

где угол  $\alpha$  определяется соотношением  $\cos \alpha = h/R$ . В уравнениях для нахождения минимальной угловой скорости  $\omega_2$  (начало проскальзывания вниз) надо изменить знаки перед силой трения. Решая уравнения, получим

$$\omega_1 = \sqrt{\left(\frac{g}{R \sin \alpha}\right) \operatorname{tg} \alpha + \mu}, \quad \omega_2 = \sqrt{\left(\frac{g}{R \sin \alpha}\right) \operatorname{tg} \alpha - \mu}.$$

При  $\mu \rightarrow 0$  обе граничные угловые скорости стремятся к оптимальной угловой скорости (при которой сила трения обращается в ноль)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R \cos \alpha}}.$$

Интересно отметить, что при  $\alpha \rightarrow 0$  это выражение не обращается в ноль, а стремится к значению  $\sqrt{g/R}$ . При меньшей угловой скорости не существует устойчивого положения шайбы на поверхности гладкой вращающейся сферы, кроме нижней точки сферы.

**Задача 9.** На тонкой нити подвешен шарик массой  $m$ . Нить приводят в горизонтальное положение и отпускают. Чему равно натяжение нити в тот момент, когда вектор ускорения шарика направлен горизонтально?

**Решение.** В начальный момент вектор ускорения шарика направлен вертикально вниз, а в нижней точке окружности – вертикально вверх. Следовательно, в каком-то промежуточном состоянии вертикальная составляющая ускорения должна изменить знак, т.е. обратиться в ноль. Запишем для этого момента второй закон Ньютона в проекциях на вертикальную ось  $y$  и на ось  $x$ , проведенную от шарика к центру окружности вдоль нити (рис.7), и закон сохранения энергии:

$$T \cos \alpha - mg = 0,$$

$$T - mg \cos \alpha = \frac{mv^2}{l},$$

$$mgl \cos \alpha = \frac{mv^2}{2},$$

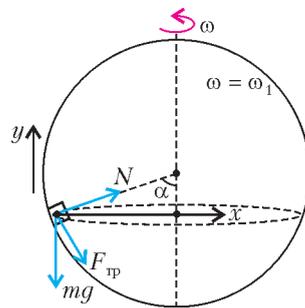


Рис. 6

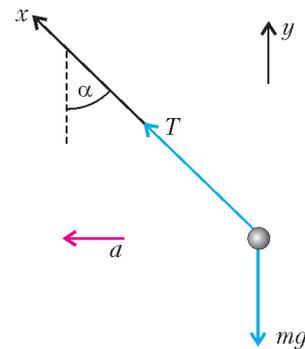


Рис. 7

где  $l$  – длина нити. Обратите внимание: ускорение направлено не к центру окружности, а горизонтально, но его проекция на радиальное направление (ось  $x$ ) равна  $v^2/l$ . Решая уравнения, получаем

$$T = \sqrt{3}mg.$$

Напоследок мы рассмотрим несколько задач, в которых движение по окружности управляется не только механическими, но и электрическими, и магнитными силами.

**Задача 10.** На рисунке 8 показана схема устройства для предварительного отбора заряженных частиц для последующего отбора заряженных частиц для последующего исследования. Устройство представляет собой конденсатор, пластины которого изогнуты дугой радиусом  $R = 50$  см. Предположим, что в промежуток между обкладками конденсатора из источника заряженных частиц (и.ч.) влетает электрон, как показано на рисунке. Напряженность электрического поля в конденсаторе по модулю равна  $E = 500$  В/м. При каком значении скорости электрон пролетит сквозь конденсатор, не коснувшись его пластин? Считать, что расстояние между обкладками конденсатора мало, напряженность электрического поля в конденсаторе всюду одинакова по модулю, а вне конденсатора электрическое поле отсутствует.

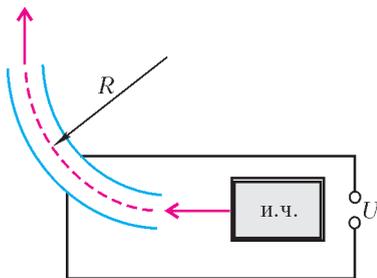


Рис. 8

**Решение.** Несмотря на громоздкость условия, эта задача, предлагавшаяся в последние годы в вариантах ЕГЭ, решается одним уравнением:

$$eE = \frac{mv^2}{R},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{eER}{m}} \approx 6,7 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Однако задачу решали правильно (точнее, вообще приступали к решению) очень немногие абитуриенты.

**Задача 11.** Четыре заряженные частицы массой  $m$  каждая с зарядами  $q, -q, q, -q$  находятся в вершинах квадрата со стороной  $l$ . Вся система вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости квадрата и проходящей через его центр. Найдите угловую скорость вращения.

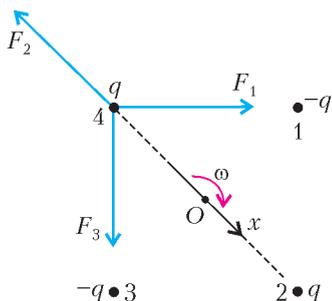


Рис. 9

Решение. Вычислим равнодействующую всех электрических сил, действующих на любую частицу, и запишем второй закон Ньютона в проекции на ось  $x$ , проведенную к центру окружности (рис. 9):

$$k \frac{q^2}{l^2} \sqrt{2} - k \frac{q^2}{(l\sqrt{2})^2} = m\omega^2 \left( \frac{l\sqrt{2}}{2} \right),$$

откуда найдем

$$\omega = \sqrt{k \frac{q^2}{ml^2} \left( 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}.$$

**Задача 12.** Маленький шарик с зарядом  $q = 2$  мКл, подвешенный на длинной нити в горизонтальном магнитном поле с индукцией  $B = 0,5$  Тл, совершает колебания в плоскости, перпендикулярной вектору индукции. Силы натяжения нити при прохождении шариком нижней точки в разных направлениях отличаются на  $\Delta T = 0,01$  Н. На сколько крайнее положение шарика выше нижнего?

**Решение.** Поскольку сила Лоренца не совершает работу, закон сохранения энергии имеет вид

$$mgh = \frac{mv^2}{2},$$

и скорость шарика в нижней точке в обоих направлениях одна и та же. Отличие состоит в том, что при движении в одну сторону сила Лоренца направлена вертикально вниз, а в другую – вертикально вверх. Запишем второй закон Ньютона для каждого случая:

$$T_1 - mg - qvB = \frac{mv^2}{l},$$

$$T_2 - mg + qvB = \frac{mv^2}{l}.$$

Вычитая одно уравнение из другого, получим

$$\Delta T = 2qvB.$$

Выразив отсюда скорость и подставив в закон сохранения энергии, найдем

$$h = \frac{(\Delta T)^2}{8g(qB)^2} = 1,25 \text{ м}.$$

### Упражнения

1. В цирковом аттракционе мотоциклист движется по внутренней поверхности сферы радиусом  $R = 8,5$  м, оставаясь все время на  $h = 5,1$  м выше центра сферы. При какой минимальной скорости это возможно? Коэффициент трения между колесами мотоцикла и поверхностью сферы  $\mu = 0,92$ .

2. На ракете массой  $m = 5$  т, летящей в глубоком космосе со скоростью  $v = 6$  км/с, для совершения поворота включают боковой реактивный двигатель. Скорость газов в реактивной струе  $u = 2$  км/с, расход топлива  $\mu = 10$  кг/с. По окружности какого радиуса происходит поворот?

3. Тяжелый шарик, подвешенный на нити длиной  $l = 50$  см, совершает колебания в вертикальной плоскости. Крайнее положение шарика на  $h = 20$  см выше нижнего. Во сколько раз максимальная сила натяжения нити в процессе движения больше, чем минимальная?

4. Три одинаковые звезды массой  $m$  каждая находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной  $a$  и вращаются вокруг оси, перпендикулярной плоскости треугольника. Найдите угловую скорость вращения.

5. Шесть частиц массой  $m$  каждая с зарядами  $q, -q, q, -q, q, -q$  находятся в вершинах правильного шестиугольника со стороной  $a$ . Вся система вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости шестиугольника и проходящей через его центр. Найдите угловую скорость вращения.

6. Грузик массой  $m = 2$  г с зарядом  $q = 4$  мКл, подвешенный на невесомой нити, находится в вертикальном магнитном поле с индукцией  $B = 3$  Тл. Грузик дважды приводят во вращение в горизонтальной плоскости, причем радиусы вращения в обоих случаях одинаковы, а направления вращения противоположны. На сколько отличаются угловые скорости этих вращательных движений?

## XXXI ТУРНИР ГОРОДОВ

## ЗАДАЧИ ОСЕННЕГО ТУРА (2009 год)

Базовый вариант

8–9 классы

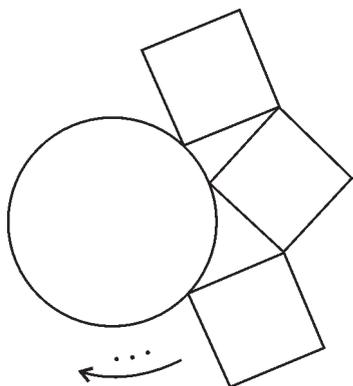
1 (3)<sup>1</sup>. См. задачу 7 конкурса «Математика 6–8» в «Кванте» №5 за 2009 год.

2 (4). Есть 40 гирек массой 1 г, 2 г, ..., 40 г. Из них выбрали 10 гирь четной массы и положили на левую чашу весов. Затем выбрали 10 гирь нечетной массы и положили на правую чашу весов. Весы оказались в равновесии. Докажите, что на какой-нибудь чаше есть 2 гири с разностью масс в 20 г.

В.Произволов

3 (4). На столе лежит картонный круг радиуса 5 см. Петя, пока возможно, прикладывает к кругу снаружи картонные квадраты со стороной 5 см так, чтобы выполнялись условия:

- 1) у каждого квадрата одна вершина лежит на границе круга;
- 2) квадраты не перекрываются;
- 3) каждый следующий квадрат касается предыдущего вершиной к вершине.



Определите, сколько квадратов может выложить Петя, и докажите, что последний и первый квадраты тоже коснутся вершинами.

А.Шаповалов

4 (5). См. задачу M2162 «Задачника «Кванта».

5 (5). См. задачу 6 конкурса «Математика 6–8» в «Кванте» №5 за 2009 год.

10 – 11 классы

1 (4). См. задачу M2162 «Задачника «Кванта».

2 (4). В пространстве расположена замкнутая шестизвенная ломаная  $ABCDEF$ , противоположные звенья которой параллельны ( $AB \parallel DE$ ,  $BC \parallel EF$  и  $CD \parallel FA$ ). При этом  $AB$  не равно  $DE$ . Докажите, что все звенья ломаной лежат в одной плоскости.

В.Произволов

<sup>1</sup> В скобках после номера каждой задачи указано максимальное количество баллов, присуждавшихся за ее решение.

3 (4). См. задачу 9 конкурса «Математика 6–8» в «Кванте» №5 за 2009 год.

4 (4). На сторонах правильного 2009-угольника отметили по точке. Эти точки являются вершинами 2009-угольника площади  $S$ . Каждую из отмеченных точек отразили относительно середины стороны, на которой эта точка лежит. Докажите, что 2009-угольник с вершинами в отраженных точках также имеет площадь  $S$ .

П.Кожевников

5 (5). В стране две столицы и несколько городов, некоторые из них соединены дорогами. Среди дорог есть платные. Известно, что на любом пути из южной столицы в северную имеется не меньше десяти платных дорог. Докажите, что все платные дороги можно распределить между десятью компаниями так, чтобы на любом пути из южной столицы в северную имелись дороги каждой из компаний.

И.Нетай, Д.Баранов

Сложный вариант

8 – 9 классы

1 (4). В 10 одинаковых кувшинов было разлито молоко – не поровну, но каждый кувшин оказался заполнен не более чем на 10%. За одну операцию можно выбрать кувшин и отлить из него поровну во все остальные. Докажите, что не более чем за 10 таких операций можно добиться, чтобы во всех кувшинах молока стало поровну.

Е.Горинов

2 (6). У Миши есть 1000 одинаковых кубиков, у каждого из которых одна пара противоположных граней белая, вторая – синяя, третья – красная. Он собрал из них большой куб  $10 \times 10 \times 10$ , прикладывая кубики друг к другу одноцветными гранями. Докажите, что у большого куба есть одноцветная грань.

М.Мурашкин

3 (6). См. задачу M2163,а) «Задачника «Кванта».

4 (6). См. задачу 10 конкурса «Математика 6–8» в «Кванте» №5 за 2009 год.

5. Из гирек массами 1 г, 2 г, ...,  $N$  г требуется выбрать несколько (больше одной) с суммарной массой, равной средней массе оставшихся гирек. Докажите, что:

- а) (2) это можно сделать, если  $N + 1$  – квадрат целого числа;
- б) (7) если это можно сделать, то  $N + 1$  – квадрат целого числа.

А.Шаповалов

6 (10). См. задачу M2164,а) «Задачника «Кванта».

7 (14). См. задачу M2167 «Задачника «Кванта».

10 – 11 классы

1 (4). См. задачу M2161 «Задачника «Кванта».

2 (6). Из  $N$  прямоугольных плиток (возможно, неодинаковых) составлен прямоугольник с неравными сторонами. Докажите, что можно разрезать каждую плитку на две части так, чтобы из  $N$  частей можно было сложить квадрат, а из

оставшихся  $N$  частей – прямоугольник.

*А.Шаповалов*

**3 (7).** Сфера касается всех ребер тетраэдра. Соединим точки касания на парах несмежных ребер. Докажите, что три полученные прямые пересекаются в одной точке.

*Фольклор (предложил В.Произволов)*

**4 (9).** См. задачу M2166 «Задачника «Кванта».

**5 (9).** Даны треугольник  $XYZ$  и выпуклый шестиугольник  $ABCDEF$ . Стороны  $AB$ ,  $CD$  и  $EF$  параллельны и равны сторонам  $XY$ ,  $YZ$  и  $ZX$  соответственно. Докажите, что площадь треугольника с вершинами в серединах сторон  $BC$ ,  $DE$  и  $FA$  не меньше площади треугольника  $XYZ$ .

*Н.Белухов*

**6 (12).** См. задачу M2167 «Задачника «Кванта».

**7 (14).** У входа в пещеру стоит барабан, на нем по кругу через равные промежутки расположены  $N$  одинаковых с виду бочонков. Внутри каждого бочонка лежит селедка – либо головой вверх, либо головой вниз, но где как – не видно (бочонки закрыты). За один ход Али-Баба выбирает любой набор бочонков (от 1 до  $N$  штук) и переворачивает их все. После этого барабан приходит во вращение, а когда останавливается, Али-Баба не может определить, какие бочонки были перевернуты. Пещера откроется, если во время вращения барабана все  $N$  селедок будут расположены головами в одну сторону. При каких  $N$  Али-Баба сможет за сколько-то ходов открыть пещеру?

*Л.Брагинский, Д.Фомин, П.Коган*

*Публикацию подготовили*

*С.Дориченко, Л.Медников, А.Шаповалов*

## ИНФОРМАЦИЯ

### Современная механика и робототехника для школьников

Механика – древнейшая естественная наука, основа научно-технического прогресса на всем протяжении человеческой истории, а современная робототехника – одно из самых важных и интересных направлений науки и техники, в котором проблемы механики и новых технологий соприкасаются с проблемами искусственного интеллекта. Возможность создать своими руками движущийся механизм, а тем более настоящего робота, всегда привлекала школьников. В последнее время получили широкое распространение легио-конструкторы, а недавно стали проводиться двухэтапные легио-соревнования всероссийского уровня. Достаточно сказать, что сейчас в отборочных соревнованиях в общей сложности принимает участие более 800 команд.

Однако уже более 10 лет проводятся «взрослые» соревнования роботов, в которых участвуют команды студентов, аспирантов и молодых ученых. В отличие от школьников, которые собирают легио-роботов из стандартных деталей, участники взрослых соревнований оказываются на переднем крае научных исследований, сами проектируют и создают новых роботов разных типов (колесных, шагающих, змееподобных) и средства управления ими, а для этого они обсуждают идеи и подходы к решению всего круга вопросов динамики, управления и стабилизации (т.е. придания устойчивости). Каждый, кто видел «взрослые» соревнования роботов, может подтвердить, что они очень интересны и зрелищны, поскольку возможности роботов, участвующих в этих соревнованиях, гораздо шире, чем возможности легио-роботов, а задания, выполняемые ими, весьма разнообразны и гораздо сложнее, чем задания на школьных соревнованиях. Дополнительное преимущество здесь получает робот, у которого более «развит» искусственный интеллект, обеспечивающий ему выбор лучшей стратегии и тактики выполнения задания.

Проблемы создания роботов привели к появлению мехатроники – новой науки, стоящей на стыке механики, электроники, информатики (включая элементы искусственного интеллекта) и робототехники. Знание каждой из этих наук совершенно необходимо для создания современного робота. Существенное препятствие для участия школьников

во «взрослых» соревнованиях – незнание ими основ общей механики и других наук в объеме, нужном для разработок робототехнических систем. Ведь в обычном школьном курсе (и даже в физико-математических школах) механика представлена только самыми простыми задачами. Школьники чаще всего не представляют, чем занимается и какие проблемы решает современная наука *механика*, хотя именно она – основа научно-технического прогресса (см. статью Г.Г.Черного в «Кванте» № 3, 4 за 2009 г.). Из-за этого в течение уже многих лет конкурсы абитуриентов при поступлении на отделения механики университетов меньше, чем на отделения математики, физики и информатики, т.е. родственных наук, о которых школьная программа дает несколько лучшее представление.

Вот почему Институт механики МГУ им. М.В.Ломоносова в 2004 году начал проведение Научно-образовательной программы (НОП) для школьников и учителей, желающих узнать о последних достижениях механики, мехатроники и робототехники. Одна из главных задач НОП – помочь школьникам в выборе будущей специальности, дать желающим начальное образование в области механики и робототехники, ближе познакомить с этими науками. Эта Программа предусматривает чтение спецкурса, проведение серии лекций, индивидуальную работу со школьниками, консультации и научное руководство, включая подготовку выступлений на школьных конференциях, конференциях молодых ученых, а также организацию конкурсов и многое другое. При содействии выбранного руководителя школьники могут начать самостоятельную научно-исследовательскую работу, попробовать свои силы в решении и исследовании конкретных задач и в конструировании робототехнических и мехатронных систем. Лучшие работы школьников рекомендуются к опубликованию в ведущих научных журналах и представлению на научных семинарах и конференциях.

Предлагаемые спецкурсы рассчитаны на учащихся 9–11 классов, читаются на доступном для школьников уровне, но охватывают широкий круг вопросов – от классических результатов в механике и робототехнике и смежных областях науки и техники до новейших научных исследований. Проводятся также лекции Лектория «Встречи с интересными учеными-механиками», тематика которых носит популярный характер и рассчитана на весьма широкий круг

слушателей. Лекции часто имеют междисциплинарный характер и посвящены вопросам, далеким от традиционных областей общей механики и робототехники. Например, были представлены такие темы: явление кавитации; математические модели систем управления объектами национальной значимости; вулканические извержения; свойства зрения живых существ и их использование при создании систем технического зрения; различные аспекты биомеханики (т.е. науки, стоящей на стыке механики и биологии) – тренажеры для космонавтов, современные материалы и их использование при протезировании костей, а также разработанная только недавно теория, удовлетворительно объясняющая измерение артериального давления крови с помощью простого прибора, состоящего из резиновой надувной манжеты, груши и манометра. Организуются экскурсии на уникальные экспериментальные установки Института механики МГУ (гидродинамическая труба, аэродинамическая труба, гидроканал и т.п.).

Ознакомление с современной механикой и робототехникой важно не только для школьников, но и для учителей средней школы. Поэтому в рамках нашей Программы проводятся курсы повышения квалификации учителей.

Важное направление Программы – создание списка научно-исследовательских задач, предлагаемых школьникам. В настоящее время он включает более 30 заданий. Так, ежегодно объявляется конкурс на постановку и проведение эксперимента по исследованию свойств сухого трения. Со списком задач и объявлением о конкурсе можно ознакомиться на сайте, указанном в конце статьи.

Для подготовки видеокурса лекций ведется их видеозапись и создается видеотека – основа для дистанционного обучения (включая работу со школами для детей с ограниченными возможностями).

Все перечисленные выше мероприятия Программы для школьников и учителей, осуществляемые на традиционных площадках, **проводятся на бесплатной основе**. Однако, по согласованию, возможно также проведение выездных лекций и семинаров, кружков, осуществление других форм сотрудничества.

Принять участие в любом мероприятии Программы (прослушивание лекций, участие в конкурсе, решение задач) может любой желающий школьник. Обращаем внимание на то, что по многим направлениям (конкурсы, научно-исследовательская работа и т.п.) возможно дистанционное участие.

Регулярно обновляемая информация обо всех мероприятиях Программы представлена на сайте Института механики <http://www.imec.msu.ru/school>

Наш электронный адрес: [school@imec.msu.ru](mailto:school@imec.msu.ru)

Почтовый адрес для переписки: 119192 Москва, Мичуринский проспект, д.1, Институт механики МГУ, Научно-образовательная программа по механике.

Приглашаем всех заинтересованных лиц и организации принять участие в нашей Программе!

*Публикацию подготовили  
С.Довбыш, Б.Локшин, М.Салмина*



## НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ЗАОЧНОЕ ДИСТАНЦИОННОЕ ОБУЧЕНИЕ

## СТОЛИЧНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

в любой точке России, не приезжая в Москву

лицензия А №181516

### Заочная школа МИФИ

для школьников  
с 6-го по 11-й классы  
**курсы**

- по математике;
- физике;
- русскому языку;
- химии

Независимо от уровня  
Вашей начальной  
подготовки  
Вы приобретёте  
прочные знания  
и подготовитесь  
к успешной сдаче ЕГЭ

### Дополнительное образование

для старшеклассников и взрослых

#### широкий спектр курсов

- компьютерные;
- бухгалтерские;
- экономические;
- гуманитарные

#### Всего более 40 курсов разной тематики и уровня

(от курсов для начинающих  
до повышающих  
квалификацию специалистов)

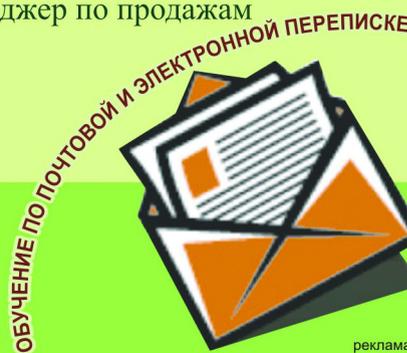
#### профессиональная подготовка

- бухгалтер;
- главный бухгалтер  
малого предприятия;
- программист-администратор;
- дизайнер;
- менеджер;
- менеджер по продажам

## ЗАКАЖИ БЕСПЛАТНЫЙ ПРОСПЕКТ:

115409, Москва, Каширское шоссе, д. 31, Заочная школа МИФИ,  
тел. 8 (495) 323-90-26, 8-800-333-90-26 (звонок бесплатный)  
[www.mifi.ru](http://www.mifi.ru) E-mail: [school@mifi.ru](mailto:school@mifi.ru)

прием проводится круглый год без вступительных экзаменов



реклама

## Конкурс «Свободный полет»

Благотворительный фонд «Новая мысль» (учредитель ЗАО «Финам») продолжает конкурс «Свободный полет» среди лиц, склонных к критическому анализу различных проблем физики, математики и информатики. Конкурсант должен сам поставить задачу и представить ее решение.

Цель конкурса: выявление и поощрение самостоятельно и конструктивно мыслящих людей.

Конкурс – ежегодный. Условия проведения очередного конкурса объявляются в декабре, итоги подводятся в мае следующего года, причем отдельно для лиц не старше 18 лет и для лиц до 35 лет.

Премиальные фонды формируются в таких размерах:

для участников не старше 18 лет – 300000 руб. (главная премия 150000 руб., три поощрительные по 50000 руб.);

для участников не старше 35 лет – 500000 руб. (главная премия 200000 руб., три поощрительные по 100000 руб.).

Оргкомитет конкурса планирует впоследствии увеличение объемов наградных фондов.

### Условия проведения конкурса

Каждый участник представляет на рассмотрение жюри свой проект, содержащий сформулированную задачу и ее

решение. (В отдельных случаях жюри готово рассматривать задачи с незавершенными решениями.)

Общий объем отчета по проекту должен быть не более 10 машинописных страниц, при этом все громоздкие вычисления должны быть вынесены в приложения, которые являются составной частью отчета.

Распечатанный вариант отчета (1 экз.) нужно прислать по почте в редакцию журнала «Квант» по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, д. 64-А, а электронный отчет отдельным файлом нужно послать на электронный адрес редакции: admin@kvant.info

Титульный лист отчета должен содержать следующую информацию о конкурсанте:

фамилия, имя, отчество;

почтовый адрес, электронный адрес, телефон;

данные об образовании, о наличии научной степени (если таковая имеется).

Срок приема заявок на участие в конкурсе – до 15 апреля 2010 года. Итоги конкурса будут подведены в конце мая 2010 года.

Работы, с согласия их авторов и заслуживающие общего внимания по мнению жюри, будут размещаться на специальном сайте фонда «Новая мысль» с указанием тех работ, которые отмечены премиями.

## Заочное отделение Малого мехмата МГУ

Малый мехмат – школа юных математиков при механико-математическом факультете МГУ им. М.В.Ломоносова – работает более 30 лет. Основные задачи Малого мехмата – углубление знаний по темам школьной программы и расширение математического кругозора за рамки программы средней школы.

Малый мехмат состоит из двух отделений: вечернего и заочного. На вечернем отделении по субботам работают кружки по математике для школьников 1–11 классов Москвы и Московской области; для учащихся 9–11 классов организованы еще и лекции.

На заочное отделение принимают учащихся из России, стран СНГ и Прибалтики, а также русскоязычных учащихся из стран дальнего зарубежья. В 2010 году заочное отделение Малого мехмата объявляет прием учащихся на 2010/11 учебный год в 8–10 классы.

Обучение на заочном отделении Малого мехмата осуществляется по переписке: школьники выполняют задания по высылаемым им методическим разработкам и отправляют свои решения для проверки. Преподаватели, проверяющие работы, указывают на ошибки в рассуждениях или вычислениях и дают указания, помогающие школьникам самостоятельно исправить эти ошибки. После проверки работы отправляются обратно. Методические разработки заочного отделения содержат необходимый для изучения данной темы теоретический материал и решения типовых задач, а также задачи для самостоятельного решения.

На заочном отделении существует возможность обучения нескольких учеников из одной школы по форме «Коллективный ученик». Группа работает под руководством своего школьного преподавателя и может включать не более 15 учащихся из одной параллели (если учащихся, желающих заниматься, больше, то можно сформировать несколько групп). Как правило, группы изучают материалы методических разработок во время факультативных (кружковых) занятий. Группа «Коллективный ученик» обучается как

один учащийся, т.е. оформляет по каждому заданию одну работу.

Школьники, прошедшие полный курс обучения (трех- или четырехлетний) и успешно закончившие обучение на заочном отделении (с итоговой оценкой «хорошо» или «отлично»), получают свидетельства об окончании Малого мехмата. Школьники, прошедшие неполный курс обучения или закончившие заочное отделение с оценкой «удовлетворительно», получают справки об окончании Малого мехмата.

Обучение на заочном отделении *бесплатное*, за исключением почтовых расходов (если таковые имеются).

### Условия приема

Зачисление индивидуальных учеников производится на конкурсной основе, по результатам выполнения приведенной ниже вступительной работы.

Ученики, желающие поступить на заочное отделение Малого мехмата, должны не позднее 30 апреля 2010 года выслать в наш адрес письмом или по электронной почте решения задач вступительной работы. Для разных классов предусмотрены задачи с разными номерами, но при этом они не обязательно должны быть решены все. Вступительную работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. Записывать решения в тетрадь следует в том же порядке, в каком задачи идут во вступительной работе. На обложку тетради следует наклеить лист бумаги со следующими данными:

1. Фамилия, имя, отчество учащегося
2. Класс (в 2010/11 учебном году)
3. Полный домашний адрес с указанием почтового индекса
4. Адрес электронной почты (если он у вас есть)
5. Телефон (с кодом города)
6. Источник, из которого вы узнали о наборе на заочное отделение.

Вступительные работы обратно не высылаются.

Группам «Коллективный ученик» не нужно выполнять вступительную работу, необходимо лишь не позднее

15 сентября 2010 года выслать письмом или по электронной почте следующие данные:

1. Фамилия, имя, отчество руководителя группы
2. Фамилии, имена, отчества учащихся (не более 15 человек)
3. Класс (в 2010/11 учебном году)
4. Полный адрес руководителя группы (по которому будут высылаться задания) с указанием почтового индекса
5. Адрес электронной почты (если он есть)
6. Телефон (с кодом города)
7. Источник, из которого вы узнали о наборе на заочное отделение.

Наш адрес: 119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, мехмат, МММФ.

Электронная почта: zaoch.mmmf@gmail.com

Сайт: <http://mmmf.math.msu.su>

Телефон: (495) 939-39-43.

### Вступительная работа

После номера каждой задачи в скобках указано, для поступающих в какие классы она предназначена.

**1** (8). В некотором городе каждый одиннадцатый математик – музыкант, а каждый тринадцатый музыкант – математик. Кого в городе больше – музыкантов или математиков?

**2** (8). Докажите, что для любого натурального  $k$  число  $k^3 + 5k$  делится на 3.

**3** (8–10). Разрежьте квадрат на: а) 6 квадратов; б) 7 квадратов.

**4** (8–10). Лёня и Паша спускаются по движущемуся вниз эскалатору, не пропуская ступенек. Паша успевает сделать три шага, пока Лёня делает два. Паша, пока спускался, успел сделать 45 шагов, а Лёня только 40. Сколько ступенек в видимой части эскалатора?

**5** (8–10). Внутри равнобедренного треугольника  $ABC$ , в котором  $AB = BC$  и угол  $B$  равен  $100^\circ$ , отмечена точка  $M$  так, что угол  $MAB$  равен  $20^\circ$ , угол  $MBA$  равен  $10^\circ$ . Вычислите угол  $BMC$ .

**6** (8–10). У капитана Смоллетта двое сыновей и несколько дочерей. Если возраст капитана (конечно, ему меньше ста лет) умножить на количество его детей и на длину его шхуны (это целое число футов), то получится 32118. Сколько лет капитану Смоллетту, сколько у него детей и какова длина его корабля?

**7** (8–10). Делится ли  $2^{62} + 1$  на  $2^{31} + 2^{16} + 1$ ?

**8** (8–10). Из бумажного треугольника вырезали параллелограмм. Докажите, что его площадь не превосходит половины площади треугольника.

**9** (9–10). Решите уравнение  $(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0$ .

**10** (9–10). В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  биссектрисы углов  $CAD$  и  $CBD$  пересекаются на стороне  $CD$ . Докажите, что биссектрисы углов  $ACB$  и  $ADB$  пересекаются на стороне  $AB$ .

**11** (9–10). Квадратный трехчлен с целыми коэффициентами  $ax^2 + bx - 5$  имеет два различных целых корня. Найдите  $a$  и  $b$ .

**12** (9–10). В выборах в 100-местный парламент участвовали 12 партий. В парламент проходят партии, за которые проголосовало строго больше 5% избирателей. Между прошедшими в парламент партиями места распределяются пропорционально числу набранных ими голосов. После выборов оказалось, что каждый избиратель проголосовал ровно за одну из партий (недействительных бюллетеней, голосов «против всех» и т.п. не было). При этом партия любителей математики набрала 25% голосов. Какое наибольшее количество мест в парламенте она может получить?

### Заочная школа «Юный математик»

Заочная школа «Юный математик», работающая при поддержке Всероссийской заочной многопредметной школы (ОЛ ВЗМШ) и Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО), объявляет набор на 2010/11 учебный год учащихся из России, стран СНГ и Прибалтики, а также русскоязычных учащихся из стран дальнего зарубежья. В школе «Юный математик» обучаются школьники 8–11 классов. Обучение проводится заочно – как по переписке, так и с использованием интернет-технологий. В рамках школы организовано три потока:

- поток «элементарная математика» по программе углубленного изучения школьного курса математики (для 8–11 классов); тематика этого потока приближена к школьной программе, хотя на нем представлены и методические разработки, посвященные олимпиадным задачам и темам, почти не рассматриваемым в школе;

- одногодичный поток «ГИА» по подготовке к Государственной итоговой аттестации (для 9 класса);

- одногодичный поток «ЕГЭ» по подготовке к Единому государственному экзамену (для 11 класса).

На потоке «ЕГЭ» учащимся предлагаются на выбор две программы: стандартная и повышенной сложности. Выбрать наиболее подходящую программу можно при помощи диагностической работы, размещенной на сайте школы, или же просто исходя из того, какой уровень подготовки вам требуется.

Зачисление на поток «элементарная математика» конкур-

сное, по результатам выполнения приведенной ниже вступительной работы. На потоки «ГИА» и «ЕГЭ» принимаются все желающие.

После зачисления каждый учащийся получает комплект методических пособий, по которым он в течение года будет выполнять в письменном виде контрольные задания и высылать их на проверку каждые 20–30 дней. Преподаватели, проверяющие задание, укажут на допущенные ошибки и дадут подробные указания к нерешенным задачам, после чего проверенная работа будет выслана обратно. По завершении полного курса обучения выдается свидетельство об окончании Заочной школы «Юный математик».

В Заочной школе «Юный математик» имеется возможность обучения нескольких учеников по форме «Коллективный ученик». Группа работает под руководством своего преподавателя (обычно – школьного учителя) и может включать не более 15 учащихся из одной параллели. Как правило, группы изучают материалы методических разработок во время факультативных (кружковых) занятий. Группы «Коллективный ученик» зачисляются в школу «Юный математик» без конкурса.

Обучение в школе «Юный математик» платное. Стоимость обучения для индивидуальных учащихся не превышала в 2009/10 учебном году 5000 руб. за годовой курс (ученики потока «элементарная математика», наиболее успешно написавшие вступительную работу, зачисляются на бесплатное или льготное обучение); для коллективных учащихся стоимость обучения зависит от числа учеников.

Ученики 7–10 классов, желающие поступить в Заочную

школу «Юный математик», должны выслать в наш адрес обычным письмом заполненную анкету либо же заполнить ее на сайте «Юного математика». При отправке анкеты обычной почтой заполняйте ее печатными буквами.

#### Анкета учащегося

1. Фамилия, имя, отчество
2. Класс, в котором вы будете учиться с 1 сентября 2010 года (с 8 по 11)
3. Полный домашний адрес с указанием индекса
4. Адрес электронной почты (если есть)
5. Домашний телефон с кодом города
6. Источник, из которого вы узнали о наборе в школу «Юный математик»
7. Укажите потоки, на которых вы хотите учиться:
  - «Элементарная математика»
  - «ГИА» (только для поступающих в 9 класс)
  - «ЕГЭ» (только для поступающих в 11 класс)
- 8 (только для подающих заявку на поток «ЕГЭ»). Укажите выбранную вами программу:
  - стандартная
  - повышенной сложности
9. Адрес вашей школы
10. Фамилия, имя, отчество вашего учителя математики (можно указать нескольких учителей).

Для зачисления на поток «элементарная математика» необходимо выполнить приведенную ниже вступительную работу (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). Записывать решения следует в том же порядке, в каком задачи идут во вступительной работе. Победители и призеры региональных, городских или районных математических олимпиад принимаются *без выполнения вступительной работы* — вместо нее достаточно выслать копию диплома.

Вступительную работу вместе с анкетой нужно выслать обычной почтой либо загрузить через сайт «Юного математика» *не позднее 30 апреля 2010 года*. При отправке работы обычной почтой заполненную анкету следует наклеить на обложку тетради. Вступительные работы обратно не высылаются.

Если вы поступаете только на потоки «ГИА» или «ЕГЭ», то вы должны выслать анкету *не позднее 1 июля 2010 года*. Выполнять вступительную работу для поступления на потоки «ГИА» или «ЕГЭ» не требуется.

Группам «Коллективный ученик» вступительную работу выполнять также *не нужно*, достаточно лишь *не позднее 15 сентября 2010 года* выслать обычным письмом заполненную анкету либо же заполнить ее на сайте «Юного математика». При отправке анкеты обычной почтой заполняйте ее печатными буквами.

#### Анкета группы «Коллективный ученик»

1. Фамилия, имя, отчество руководителя группы
2. Класс, в котором члены группы будут учиться с 1 сентября 2010 года (с 8 по 11; в составе одной группы могут быть учащиеся только из одной параллели)
3. Полный почтовый адрес руководителя группы (по которому следует высылать задания) с указанием индекса
4. Адрес электронной почты (если есть)
5. Домашний телефон руководителя группы (с кодом города) или телефон школы
6. Источник, из которого вы узнали о наборе в Заочную школу «Юный математик»
7. Укажите потоки, на которых ваша группа будет учиться:
  - «Элементарная математика»

- «ГИА» (только для поступающих в 9 класс)
  - «ЕГЭ» (только для поступающих в 11 класс)
8. Фамилии, имена, отчества учащихся в алфавитном порядке (не более 15 человек).

*Наш почтовый адрес:* 119002 Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, МЦНМО, Заочная школа «Юный математик».  
Телефон: (499) 241-89-79.  
Сайт: <http://zaoch.ru>

#### Вступительная работа

После номера каждой задачи в скобках указано, для поступающих в какие классы она предназначена. За решения задач для других классов баллы не начисляются!

**1 (8–9).** Вверх по реке шел катер. В полдень за борт упала бочка. В час дня пропажу на катере заметили и повернули обратно. В котором часу катер догонит бочку, если скорость катера постоянна?

**2 (8–9).** Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1; один из острых углов треугольника равен  $15^\circ$ . Найдите гипотенузу.

**3 (8–9).** За 18 дней брусок мыла уменьшился на 50% по высоте, на 30% по длине и на 20% по ширине. На сколько еще дней его хватит, если каждый день расходуется один и тот же объем мыла?

**4 (8–9).** В отаре 8 овец. Первая съедает копну сена за 1 день, вторая — за 2 дня, и так далее; восьмая — за 8 дней. Кто быстрее съест копну сена: первые две овцы или все остальные?

**5 (8–9).** Средний возраст одиннадцати футболистов — 22 года. Во время игры один из игроков был удален с поля, после чего средний возраст оставшихся игроков стал равен 21 году. Сколько лет удаленному футболисту?

**6 (8–11).** В треугольнике  $ABC$  угол  $B$  равен  $120^\circ$ . На биссектрисе угла  $B$  выбрана точка  $D$  так, что  $BD = AB + BC$ . Докажите, что треугольник  $ACD$  равносторонний.

**7 (8–11).** Три простых числа  $p_1, p_2, p_3$ , каждое из которых больше трех, таковы, что  $p_1 - p_2 = p_2 - p_3$ . Докажите, что  $p_1 - p_2$  делится на 6 без остатка. (Напомним, что *простым* называется натуральное число, имеющее ровно два делителя — единицу и само себя.)

**8 (8–11).** В скачках принимали участие три лошади. На победу первой лошади ставки принимались из расчета 4:1 (это значит, что если первая лошадь побеждает, то игроку возвращаются поставленные на нее деньги и еще в четыре раза больше; если лошадь не побеждает, то игрок теряет поставленные деньги), на победу второй лошади — 3:1, на победу третьей — 1:1. Можно ли так распределить ставки, чтобы при любом исходе скачек оказаться в выигрыше?

**9 (8–11).** В фильме «Самогонщики» три друга гонят самогон. У Труса течет жидкость крепостью  $a\%$  и стандартная бутылка наполняется за  $a$  часов. У Балбеса течет жидкость крепостью  $b\%$  и такая же бутылка наполняется за  $b$  часов; у Бывалого —  $c\%$  и  $c$  часов соответственно. Для ускорения процесса друзья направили трубки аппаратов в одну бутылку и наполнили ее за сутки. Найдите крепость полученной смеси.

**10 (8–11).** Нарисуйте все различные развертки куба. Развертки считаются различными, если их нельзя совместить при помощи поворота или отражения.

**11 (10–11).** Докажите неравенство  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$ .

**12 (10–11).** Решите уравнение  $x^3 + \frac{1}{x^3} = 5\left(x + \frac{1}{x}\right)$ .

**13** (10–11). В треугольнике  $ABC$  известны стороны:  $AB = 9$ ,  $BC = 8$ ,  $AC = 7$ . Окружность, проходящая через точку  $A$ , касается стороны  $BC$  в точке  $D$  и пересекает стороны  $AB$  и  $AC$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Найдите длину отрезка  $EF$ .

**14** (10–11). Постройте график функции  $y = \left| \frac{3}{|x-3|} - 3 \right|$  и

определите, при каких значениях  $a$  уравнение  $\left| \frac{3}{|x-3|} - 3 \right| = a$  имеет ровно два корня.

**15** (10–11). Прямоугольник  $m \times n$  ( $m, n$  – натуральные числа) разбит на квадратные клетки со стороной 1. Сколько таких клеток пересекает диагональ прямоугольника? (Диагональ *пересекает* клетку, если она проходит хотя бы через одну ее внутреннюю точку.)

## Пока горит свеча... или кристалл

(Начало см. на с. 31)

сеть только от температуры его стенок, и поэтому, затвердевая, парафин будет отдавать каждую минуту такое же количество теплоты, как и вода, т.е.  $q_v$ . Можно считать, что затвердевание парафина в нашем опыте продолжалось в течение интервала времени  $t_3 = 120$  мин. Тогда для удельной теплоты плавления парафина  $\lambda_{\text{п}}$  получим

$$\lambda_{\text{п}} = \frac{q_v t_3}{m_{\text{п}}} = \frac{m_{\text{в}}}{m_{\text{п}}} c_{\text{в}} r_{\text{в}} t_3 \approx 640 \text{ кДж/кг}.$$

К сожалению, справочники указывают для  $\lambda_{\text{п}}$  величину от 200 до 220 кДж/кг, что может означать неправильность сделанного нами допущения – пренебрежения процессами конвекции. Очевидно, что в стакане с водой процессы конвекции гораздо более существенны для теплообмена, чем в меде и жидком парафине. Поэтому удельную теплоту плавления парафина лучше вычислять, используя кривую остывания меда, а не воды. Из рисунка следует, что в диапазоне температур от 62 до 58 °С мед массой 253 г, имеющий удельную теплоемкость  $c_{\text{м}} = 2400$  Дж/(кг·°С), остывает со скоростью  $r_{\text{м}} = 0,45$  °С/мин. Поэтому

$$\lambda_{\text{п}} = \frac{m_{\text{м}}}{m_{\text{п}}} c_{\text{м}} r_{\text{м}} t_3 \approx 210 \text{ кДж/кг}.$$

Полученная оценка  $\lambda_{\text{п}}$  очень близка к табличным значениям, что подтверждает сделанные нами предположения.

Относительно большие значения удельной теплоты плавления и удельной теплоемкости парафина (2,2 – 2,9 кДж/(кг·°С)) делают его очень ценным строительным материалом, так как он может хорошо сохранять тепло. Парафин добавляют в сухую штукатурку, днем он слегка расплавляется, а ночью отвердевает, возвращая тепло. Эти свойства парафина используются также для термостабилизации электроники космических кораблей. В будущем парафин планируется использовать в качестве топлива космических кораблей с так называемым гибридным двигателем, у которого окислитель находится в газообразном виде, а топливо – в твердом. Опыты показали, что при горении мелких гранул парафина в струе кислорода его удельная теплота горения может увеличиваться в несколько раз. Однако основным преимуществом парафина перед существующими видами топлива является его безопасность и безвредность для окружающей среды – ведь при горении образуется только углекислый газ и вода. Безвредность парафина для человека обусловила его широкое применение в пищевой промышленности.

Итак, мы еще раз доказали справедливость слов М.Фарадея – изучая свечу, изучаешь физику.

К.Богданов

## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

### КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №4 за 2009 г.)

	М						
					К		
			К				
М							М
				К			
		К					
							М

Рис. 1

все дроби, стоящие в правой части первого равенства, к одному знаменателю  $A$ . В числителе полученной дроби окажется сумма всех делителей числа  $A$  (почему?). Получаем

$$\alpha = \frac{a_1 + \dots + a_n + A}{A} - 1 = \frac{a_1 + \dots + a_n}{A} = \frac{B}{A}.$$

Аналогично найдем  $\beta = \frac{A}{B}$ . Отсюда следует, что  $\alpha\beta = 1$ .

**1.** См. рис. 1.

**2.** 1.

Пусть  $a_1, \dots, a_n$  – все делители числа  $A$ , кроме самого  $A$ , а  $b_1, \dots, b_m$  – все делители числа  $B$ , кроме самого  $B$ . Тогда  $A = a_1 + \dots + a_n + A$  и  $B = b_1 + \dots + b_m + B$ . По условию, имеем два равенства:

$$\alpha = \frac{1}{A} + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} - 1,$$

$$\beta = \frac{1}{B} + \frac{1}{b_1} + \dots + \frac{1}{b_m} - 1.$$

Приведем

**3.** 49.

Рассмотрим маршрут, в котором каждая дорога пройдена ровно один раз. Пусть этот маршрут начинается в городе  $A$  и заканчивается в городе  $B$ . В каждый город, за исключением, возможно,  $A$  и  $B$ , мы попадали столько же раз, сколько покидали его, – всего четное число раз, поэтому хотя бы один раз прилетали в него или улетали из него. Тогда количество перелетов не меньше чем  $\frac{100-2}{2} = 49$ .

Докажем, что 49 перелетов всегда достаточно. Пусть города и дороги расположены так, что они образуют  $m$  изолированных областей, между которыми дорожного сообщения нет (но в одной области можно попасть из любого города в любой, двигаясь по дорогам). Поскольку из каждого города выходит хотя бы одна дорога, то в каждой области не меньше двух городов, а областей не больше 50. Обозначим эти области  $O_1, \dots, O_m$ . Выберем в каждой области  $O_i$  любые два города  $A_i$  и  $B_i$ . Объясним теперь, как построить нужный нам маршрут, в котором город  $A_1$  будет его началом, а город  $B_m$  – концом. Сначала для каждого  $i$  от 1 до  $m-1$  соединим соседние области  $O_i$  и  $O_{i+1}$  перелетом из  $B_i$  в  $A_{i+1}$  (всего понадобится  $m-1$  перелетов). Городов, которые мы пока никак не обозначили, осталось  $100 - 2m$ . Разобьем их как

нибудь на  $50 - m$  пар и для каждой пары добавим перелет, соединяющий города этой пары. Всего как раз получается  $m - 1 + 50 - m = 49$  перелетов. Изобразим теперь страну в виде графа: вершинами будут города, а ребрами – дороги и выбранные нами 49 перелетов. Мы получим связный граф (от любой вершины можно добраться до любой другой по ребрам), в котором из вершин  $A_1$  и  $B_m$  выходит нечетное число ребер, а из остальных вершин – четное. Такой граф называется *эйлеровым*, и в нем обязательно найдется маршрут, начинающийся в  $A_1$  и заканчивающийся в  $B_m$ , проходящий по каждому ребру ровно один раз (попробуйте доказать это). Значит, у путешественника есть маршрут, использующий ровно 49 перелетов, в котором каждая дорога встречается один раз.

Об эйлеровых графах и о графах вообще можно прочитать в замечательной книге О.Оре «Графы и их применение».

**4.** Для начала докажем, что простых чисел бесконечно много. Пусть это не так, и  $p_1, \dots, p_n$  – все простые числа. Рассмотрим число  $p_1 \dots p_n + 1$ . Очевидно, что оно не делится ни на какое  $p_i$ . Это означает, что либо оно само простое, либо делится на какое-то простое число, отличное от  $p_1, \dots, p_n$ . В любом случае найдено еще одно,  $(n + 1)$ -е простое число – противоречие.

Теперь легко показать, что и уютных чисел бесконечно много. Заметим, что числа  $p - 2, p, p + 2$  дают разные остатки от деления на 3. Тогда если  $p$  – простое число, большее 5, то одно из чисел  $p - 2, p + 2$  делится на 3 и при этом больше 3, т.е. составное. Если это  $p - 2$ , то число  $p - 1$  уютное, а если

$p + 2$ , то  $p + 1$  уютное.

Так можно найти уютное число «рядом» с каждым простым числом, большим 5. Значит, и уютных чисел бесконечно много.

**5.** Из точки  $A$  опустим перпендикуляры  $AE$  и  $AF$  на лучи  $CB$  и  $CD$  соответственно. При этом образуются равные прямоугольные треугольники  $ACE$  и  $ACF$  с острым углом  $60^\circ$  при вершине  $C$

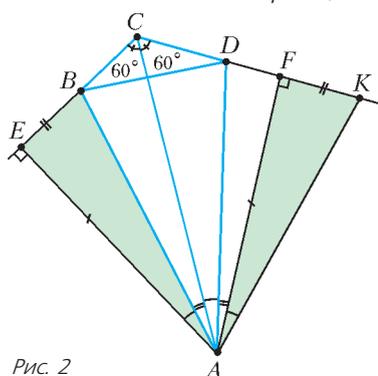


Рис. 2

(рис.2). Тогда второй острый угол в них равен  $30^\circ$ , поэтому  $CE = CF = \frac{1}{2} AC$  и  $CE + CF = AC$ . Из рисунка видно, что

задача свелась теперь к проверке равенства  $BE + DF = BD$ .

На луче  $DF$  за точкой  $F$  отметим точку  $K$ , такую что  $FK = BE$ . Теперь осталось доказать, что  $BD = DK$ . Для этого достаточно установить равенство треугольников  $BAD$  и  $KAD$ , что мы сейчас и сделаем. Треугольники  $AFK$  и  $AEB$  равны по двум катетам, и, следовательно,  $AK = AB$ ,  $\angle BAE = \angle FAK$  (мы просто «приставили» треугольник  $AEB$  к стороне  $AF$  треугольника  $ADF$ ). Так как каждый из углов  $BAC$  и  $DAF$  дополняет угол  $CAD$  до  $30^\circ$ , они равны друг другу. Точно так же получим, что  $\angle CAD = \angle BAE$ . Значит,  $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = \angle DAF + \angle FAK = \angle DAK$ , и треугольники  $BAD$  и  $KAD$  равны по двум сторонам и углу между ними.

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

### Вопросы и задачи

1. Да, примерно такую массу имеет точка типографского шрифта.
2. Приблизительно сто тысяч миллиардов атомов.
3. Если считать молекулы шариками, плотно прилегающими друг к другу, то на каждую из них приходится  $(1/N_A)$ -я

часть молярного объема. Извлекая кубический корень из этого объема, находим диаметр молекулы. Для воды он составляет примерно 0,3 нм, для спирта 0,46 нм.

**4.** Когда смешивают два вещества, молекулы одного из них могут «занять» часть объема в пространстве между молекулами другого, при этом объем смеси будет меньше, чем сумма первоначальных объемов обоих веществ. Это уменьшение объема особенно заметно, если размеры молекул одного вещества значительно меньше, чем у другого.

**5.** Расчет, аналогичный приведенному в решении задачи 3, дает величину среднего расстояния между молекулами водорода примерно 30 нм, что в 150 раз больше диаметра самой молекулы (около 0,2 нм).

**6.** Разрежение газа ведет к увеличению длины свободного пробега (а это десятки нанометров при нормальных условиях) электронов и ионов под действием электрического поля, т.е. к увеличению их кинетической энергии. Поэтому при уменьшении плотности воздуха ионизация его молекул наступает при более низком напряжении.

**7.** Вода просачивается через мельчайшие поры глиняного сосуда и обращается в пар. На испарение расходуется энергия, отнимаемая от сосуда с водой, из-за чего он охлаждается. Температура воды и воздуха сравниваются, если окружающий воздух будет насыщен водяными парами.

**8.** Нет. Водяной пар, состоящий из молекул воды размером менее нанометра, невидим. То, что мы наблюдаем, это туман, состоящий из капелек воды много большего размера, образующихся при конденсации пара.

**9.** Легкие, т.е. более подвижные, частицы быстрее проходят сквозь нанометровые поры перегородки. Поэтому сначала вырывается число легких частиц в единице объема, и давление в секции, где находились тяжелые частицы, увеличивается. Через некоторое время становится одинаковой и плотность тяжелых частиц, и давления выравниваются.

**10.** С увеличением размеров частицы число ударов молекул о ее поверхность возрастает пропорционально квадрату ее размера, тогда как масса растет пропорционально кубу размера, поэтому молекулам становится все труднее и труднее сдвинуть частицу.

**11.** При нагревании проволоки расстояния между атомами, составляющие доли нанометра, в среднем увеличиваются, а силы притяжения между ними соответственно уменьшаются.

**12.** Вода смачивает песок и обволакивает каждую песчинку. Сокращая свою свободную поверхность под влиянием поверхностного натяжения, вода препятствует расползанию песчинок.

**13.** Припой (легкоплавкий сплав) заполняет мельчайшие неровности поверхностей и, отвердев, обеспечивает прочное сцепление проводов межмолекулярными силами, действующими на расстояниях меньше нанометра.

**14.** Смачивая края поверхностной трещины на стекле, вода оказывает на него «расклинивающее» действие, что способствует раздвиганию стенок трещины.

**15.** Благодаря смачиванию, в многочисленных порах и мельчайших капиллярах кирпича бензин хорошо удерживается силами поверхностного натяжения. По мере нагревания бензин частично вытекает, частично испаряется и таким образом поддерживает огонь для обогрева.

**16.** Вода во внутреннем слое мыльной пленки постепенно стекает вниз, и верхняя часть пленки становится все тоньше. Когда ее толщина достигает размеров двух диаметров молекул мыла, иначе говоря промежуточный водяной слой исчезает, при интерференции отраженных лучей света в столь тонкой пленке гасятся волны всех длин, и возникает темное пятно. Это – свидетельство того, что пленка слишком тонка и скоро лопнет.

### Микроопыт

При температуре 220 – 350 °С сталь покрывается нанометровой прозрачной оксидной пленкой. Конкретная толщина пленки обусловлена температурой, а от толщины зависит результат интерференции отраженных световых лучей.

### ПОДВИГ ЮНОГО БЕРТОЛЬДА

Узники могли действовать, например, так. Выберем одного из узников «счетчиком» (собственно, им и был юный Бертольд). Он будет считать узников, которые посетили Черную-черную комнату, следующим образом. Вначале число подсчитанных узников равно нулю. Далее, если, приходя в Черную-черную комнату, «счетчик» обнаруживает, что свет включен, он прибавляет к уже посчитанному числу узников единицу и выключает свет, если же свет не горит, то он, ничего не меняя, возвращается обратно в свою камеру. Каждый из прочих, обычных узников, действует по такому правилу: если, приходя в Черную-черную комнату, он обнаруживает, что свет не горит, и он до этого ни разу не включал свет, то он его включает. В остальных случаях он ничего не меняет.

Когда число посчитанных узников становится равным 19, «счетчик» говорит, что все узники уже побывали в комнате. Эта стратегия приводит к желаемому результату. В самом деле, каждый узник, кроме Бертольда, включит свет в комнате не более одного раза, а Бертольд вообще не включает свет. Если «счетчик» насчитал 19, значит, каждый из оставшихся узников побывал в комнате хотя бы раз. И «счетчик» там, конечно, тоже уже был.

Почему Бертольд непременно досчитает до 19? Допустим, это не так, т.е. свет будет включен менее 19 раз, – досчитав до некоторого числа  $m < 19$ , «счетчик» выключит свет, и больше лампа никогда не будет зажжена. Но поскольку прочих дракоборцев 19, обязательно найдется узник, еще не заживший лампу. По условию, он окажется в Черной-черной комнате и после указанного момента и должен будет включить свет. Противоречие.

Попробуйте решить более сложную задачу – придумайте стратегию узников, если неизвестно, включена вначале лампа или выключена.

### ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ ПО ОКРУЖНОСТИ

- $v_{\min} = \sqrt{gR \sin \alpha \frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu}{\mu \operatorname{tg} \alpha - 1}} = 26 \text{ м/с}$  (здесь  $\cos \alpha = \frac{h}{R}$ ).
- $R = \frac{mv^2}{\mu u} = 9000 \text{ км.}$
- $\frac{T_{\max}}{T_{\min}} = \frac{l+2h}{l-h} = 3.$
- $\omega = \sqrt{\frac{3Gm}{a^2}}.$
- $\omega = \sqrt{k \frac{q^2}{ma} \left( \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)}.$
- $\Delta \omega = \frac{qB}{m} = 6 \text{ с}^{-1}.$

### XXXI ТУРНИР ГОРОДОВ

ЗАДАЧИ ОСЕННЕГО ТУРА (2009 год)

Базовый вариант

8 – 9 классы

2. Разобьем гирьки на пары с разностью масс 20 г: (1, 21), (2, 22), ..., (20, 40). Если на весах окажутся обе гирьки какой-то пары, все доказано. Иначе на весах оказалось ровно по одной гирьке из каждой пары. Тогда (независимо от выбора гирек в каждой паре) масса гирь на правой чашке весов при делении на 20 даст тот же остаток, что и сумма  $1 + 3 + \dots + 19 = 100$  (т.е. 0), а масса гирь на левой чашке даст тот

же остаток, что и сумма  $2 + 4 + \dots + 20 = 110$  (т.е. 10). Противоречие: по условию эти массы равны.

3. 8 квадратов.

Если вершина  $A$  квадрата  $ABCD$  лежит на окружности с центром  $O$ , то точки  $B, D$  и  $O$  лежат на окружности радиусом 5 см и центром  $A$  (рис. 3).

Вписанный угол  $BOD$  равен  $45^\circ$  – как половина центрального угла  $BAD$ . Итак, по условию каждый выложенный квадрат виден из центра под углом  $45^\circ$ , и границы соседних углов совпадают, поэтому всего Петя сможет выложить  $360^\circ/45^\circ = 8$  квадратов. Пусть  $EDFG$  – еще один выложенный квадрат ( $E$  лежит на окружности).  $OADE$  – ромб, поэтому  $\angle OAD = \angle OED$ . Отсюда

$$\angle OAB = 360^\circ - 90^\circ - \angle OAD = 360^\circ - 90^\circ - \angle OED = \angle OEG.$$

Треугольники  $OAB$  и  $OEG$  равны по двум сторонам и углу между ними, значит,  $OB = OG$ . Итак, вершины квадратов, противоположные общей, равноудалены от  $O$ . Таким образом, одна вершина первого квадрата и одна вершина восьмого лежат на одном и том же луче из  $O$  на одинаковом расстоянии от  $O$ . Значит, они совпадают.

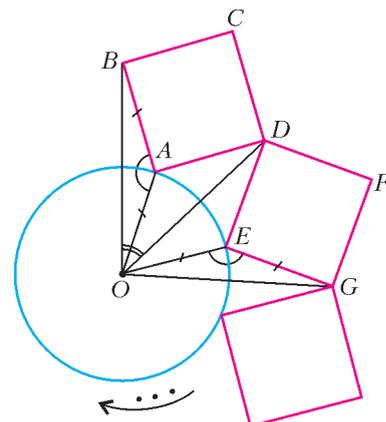


Рис. 3

10 – 11 классы

2. Первое решение.

Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны, так как  $EF \parallel BC$  и  $AF \parallel CD$  (рис.4). Если бы они не совпадали, то пересекали бы на параллельных прямых  $AB$  и  $DE$  равные отрезки  $AB = DE$ . Значит, все 6 точек лежат в плоскости  $AEF$ .

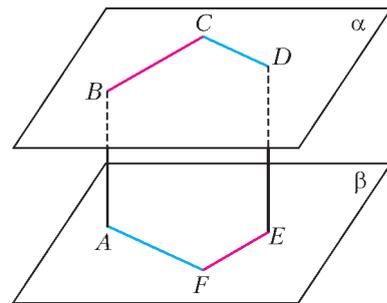


Рис. 4

Второе решение. Вектор  $\overline{AD}$  двумя разными способами выражается через векторы  $\overline{AB}, \overline{BC}$  и  $\overline{CD}$ :  $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{ED} + \overline{FE} + \overline{AF} = a\overline{AB} + b\overline{BC} + c\overline{CD}$ , где  $a \neq 1$ . Поэтому векторы  $\overline{AB}, \overline{BC}$  и  $\overline{CD}$  компланарны.

4. Пусть  $A_1A_2 \dots A_{2009}$  – правильный 2009-угольник со стороной 1,  $\varphi$  – его угол,  $P$  – его периметр,  $M$  – наш 2009-угольник площади  $S$ ,  $a_i$  – расстояние от  $A_i$  до ближайшей по часовой стрелке отмеченной вершины ( $i = 1, 2, \dots, 2009$ ). Сторона многоугольника  $M$  отсекает от угла  $A_i$  правильного многоугольника треугольник площади  $0,5 \sin \varphi (1 - a_{i-1}) a_i$  (рис.5). Суммируя отсеченные площади, получаем

$$0,5 \sin \varphi ((a_1 + a_2 + \dots + a_{2009}) - (a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{2009} a_1)).$$

После отражения сторона нового 2009-угольника отсекает от

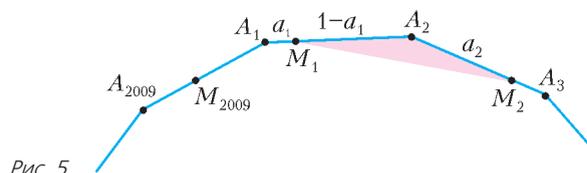


Рис. 5

угла  $A_i$  треугольник площади  $0,5 \sin \varphi \cdot a_{i-1}(1 - a_i)$ . Суммируя отсеченные площади, снова получаем тот же результат.

**5. Первое решение.** Отметим на каждом пути из южной столицы Ю в северную С самую первую платную дорогу числом 1. Докажем, что на каждом пути  $p$  осталось не менее 9 неотмеченных платных дорог.

Выберем на  $p$  ближайшую к С отмеченную дорогу  $d$ . Поскольку она отмечена, она была 1-й платной на некотором пути  $q$ . Пройдем от Ю до  $d$  по (бесплатным дорогам) пути  $q$ , а далее через  $d$  вдоль  $p$  до С. По условию на таком пути не менее 10 платных дорог, и только дорога  $d$  отмечена. Значит, на участке пути от  $d$  до С есть не менее 9 неотмеченных платных дорог.

Объявим временно отмеченные дороги бесплатными и отметим на каждом пути первую платную дорогу числом 2. Теперь на каждом пути останется не менее 8 платных дорог. Повторяя рассуждение, расставим отметки 3, ..., 10 на каждом пути. Раздадим дороги компаниям в соответствии с их «номерами». Оставшиеся платные дороги раздадим произвольно.

**Второе решение.** Пусть проезд по каждой платной дороге стоит 1 тугрик. Назовем *весом* дороги наименьшую сумму, которую надо заплатить, чтобы, выехав из южной столицы, проехать по этой дороге.

Докажем, что вес самой северной дороги каждого пути не меньше 10. Предположим противное – что вес последней дороги на пути  $p$  не превосходит 9. Тогда до нее можно дойти, заплатив не более 8 тугриков. Продолжив путь по остатку пути  $p$ , мы получим (в противоречии с условием) пример пути, на котором менее 10 платных дорог. Заметим, что первая платная дорога на каждом пути имеет вес 1. При переходе к следующей дороге вес не меняется или увеличивается на 1. Поэтому на каждом пути есть дороги любого веса от единицы до 10. Отдадим  $k$ -й компании все дороги веса  $k$ , а дороги, вес которых больше 10, распределим произвольно.

*Сложный вариант*

*8 – 9 классы*

**1.** Отольем из каждого кувшина во все остальные  $1/10$  от первоначального количества молока в данном кувшине. Тогда молоко из каждого кувшина распределится поровну по всем 10 кувшинам, и, значит, во всех кувшинах станет одинаковое количество молока.

**2.** Пусть левая грань большого куба – разноцветная. Тогда найдутся два соседних разноцветных квадратика. Повернем большой куб так, чтобы соответствующие кубики были один над другим. Они образуют параллелепипед  $2 \times 1 \times 1$  с разноцветной (скажем, сине-белой) левой гранью. Тогда общая горизонтальная грань этих кубиков красная, а все вертикальные грани  $2 \times 1$  у П – сине-белые. Рассмотрим параллелепипед П'  $2 \times 1 \times 1$ , примыкающий к П по грани  $2 \times 1$ . У него есть сине-белая грань, значит, и все его грани  $2 \times 1$  – сине-белые. Так продолжая, видим, что в двойном горизонтальном слое  $2 \times 10 \times 10$ , содержащем П, у всех вертикальных параллелепипедов  $2 \times 1 \times 1$  есть сине-белая грань, и, значит, общая грань красная. Итак, в двойном слое одинарные слои  $1 \times 10 \times 10$  соприкасаются по красной грани  $10 \times 10$ , значит, и верхняя грань большого куба – тоже красная.

**5. а)** Пусть  $N + 1 = k^2$ . Выберем гирьки масс 1, 2, ...,  $k$ , их сумма равна  $\frac{k^2 + k}{2}$ . Среднее арифметическое оставшихся

последовательных чисел равно полусумме крайних, т.е.

$$\frac{k + 1 + k^2 - 1}{2} = \frac{k^2 + k}{2}$$

**б)** Общая масса всех  $N$  гирек равна  $\frac{N^2 + N}{2}$ . Пусть мы выб-

рали  $k$  гирек общей массой  $S$  так, что средняя масса оставшихся  $N - k$  гирек равна  $S$ . Значит,  $\frac{N^2 + N}{2} - S = (N - k)S$ , что равносильно равенству  $2S(N - k + 1) = N^2 + N$ . Отсюда следует, что  $2S > N + k$ , поскольку

$$N^2 + N > N^2 + N - k^2 + k = (N + k)(N - k + 1).$$

С другой стороны, если мы выбираем  $k$  *наименьших* гирь, то средняя масса оставшихся будет *наибольшей* и равной

$$\frac{N + k + 1}{2}, \text{ т.е. (при любом выборе гирь) } 2S \leq N + k + 1.$$

Итак, единственный возможный вариант – выбрать  $k$  *наименьших* гирь, удвоенная общая масса  $k^2 + k$  которых должна *равняться*  $N + k + 1$ . Отсюда  $N + 1 = k^2$ .

*10 – 11 классы*

**2.** Пусть размеры прямоугольника  $a \times b$ ,  $a < b$  и сторона  $b$  горизонтальна. Сожмем прямоугольник равномерно по горизонтали так, чтобы стороны стали равны. Получим разбитый на прямоугольнички квадрат. Каждая его часть получается сжатием плитки по горизонтали в  $b/a$  раз. Значит, она имеет меньшую ширину, но ту же высоту, и такую часть можно отрезать от плитки вертикальным разрезом. Оставшаяся часть плитки получается из нее сжатием по горизонтали в  $b/(b - a)$  раз. Соответственно, из них можно сложить прямоугольник, получающийся из исходного сжатием в  $b/(b - a)$  раз.

**3. Первое решение.** Поместим в каждую вершину массу, обратно пропорциональную длинам проведенных из этой вершины касательных к сфере (все три касательные для данной вершины, очевидно, равны). Тогда точка касания ребра совпадает с центром масс этого ребра, и все три отрезка из условия задачи пересекаются в центре масс тетраэдра.

**Второе решение.** Пусть  $K, L, M, N, P, R$  (рис.6) – точки, в которых соответственно ребра  $AB, AC, AD, BC, BD, CD$  тетраэдра  $ABCD$  касаются сферы,  $a, b, c, d$  – длины касательных, выходящих соответственно из вершин  $A, B, C, D$ .

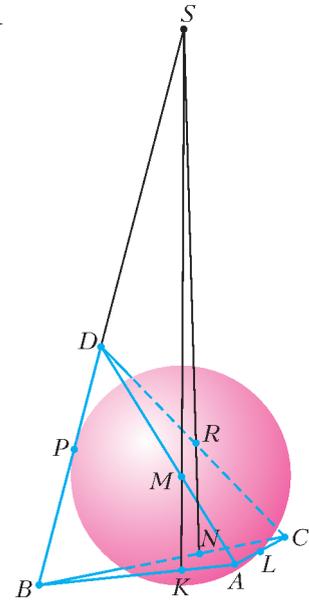


Рис. 6

Плоскости  $ABD$  и  $BCD$  пересекаются по прямой  $BD$ . По теореме Менелая (примененной к треугольнику  $ABD$ ) прямая  $MK$  пересекает  $BD$  в точке, делящей отрезок  $BD$  (внешним образом) в отношении  $\frac{AM}{DM} \cdot \frac{BK}{AK} = \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{d}$ . По той же

причине прямая  $RN$  пересекает  $BD$  в той же точке:  $\frac{CR}{DR} \cdot \frac{BN}{CN} = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{c} = \frac{b}{d}$ . (Если  $b = d$ , то  $MK$  и  $RN$  параллельны  $BD$ .)

Значит, прямые  $MK$  и  $RN$  лежат в одной плоскости (пересекаются или параллельны). Следовательно, прямые  $MN$  и  $KR$  также пересекаются.

Аналогично, прямая  $LP$  пересекает  $MN$  и  $KR$ .

Поскольку эти три прямые очевидно не лежат в одной плоскости, они должны пересекаться в одной точке.

**5.** Построим параллелограмм  $BCDI$  (рис.7). По условию треугольники  $ABI$  и  $XYZ$  равны. Значит, отрезок  $AI$  параллелен и равен  $FE$ , т.е.  $AIEF$  – тоже параллелограмм.

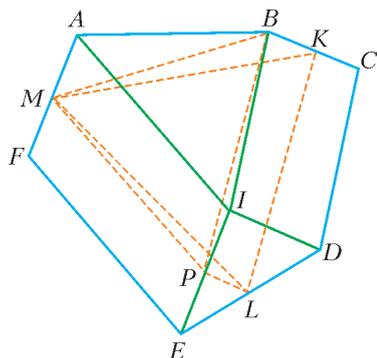


Рис. 7

Пусть  $K, L, M$  – середины сторон  $BC, DE, FA$  соответственно,  $P$  – середина  $EI$ .

Тогда

$$S_{KLM} > S_{MPV} > S_{ABV} = S_{XYZ}.$$

Оба неравенства следуют из следующего очевидного утверждения:

Пусть  $TUVW$  – параллелограмм, точка  $R$  и отрезок  $VW$  лежат по разные стороны от прямой  $TU$ .

Тогда

$$S_{RVW} > S_{RTU}.$$

(В первом неравенстве используется параллелограмм  $BKLP$ , во втором –  $AIPM$ .)

*Замечание.* В этой задаче есть досадный второй случай, который не учитывает приведенное решение: когда шестиугольник и треугольник, данные в условии, ориентированы по-разному (т.е. шестиугольник при чтении букв – названий вершин – обходится по часовой стрелке, а треугольник – против). В этом случае, если достраивать на одной из сторон шестиугольника наш треугольник, он будет торчать наружу!

Вот набросок решения для этого случая. Он сводится к первому следующей перестройкой шестиугольника (рис.8). Здесь

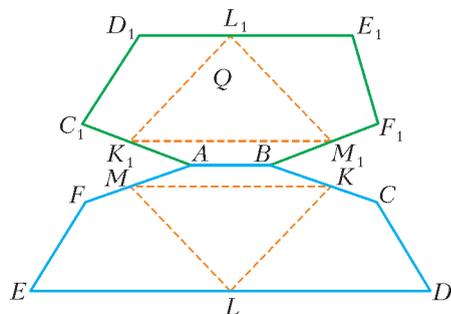


Рис. 8

$\overline{AC_1} = \overline{CB}$ ,  $\overline{C_1D_1} = \overline{EF}$ ,  $\overline{BF_1} = \overline{FA}$ ,  $\overline{F_1E_1} = \overline{DC}$ . Отсюда легко следует, что  $\overline{K_1L_1} = \overline{LK}$ ,  $\overline{K_1M_1} = \overline{MK}$ ,  $\overline{L_1M_1} = \overline{ML}$ , т.е. серединный треугольник не изменился.

7. При  $N = 2^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Заменим бочонки на нули и единицы, стоящие по кругу. Пусть  $N \neq 2^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  Покажем, что при невезении Али-Баба никогда не откроет пещеру. Можно считать, что мы играем против Али-Бабы, вращая круг, и что он заранее говорит нам, на каких местах он будет менять цифры на каждом (в том числе и на первом) ходу.

Рассмотрим сначала случай, когда  $N$  нечетно. Расставим на круге нули и единицы так, чтобы Али-Баба не выиграл первым своим (известным нам) ходом (т.е. чтобы после его хода на круге были как нули, так и единицы).

Пусть Али-Баба на очередном ходу выбрал для замены определенные  $k$  мест. Он выиграет, только если эти  $k$  мест совпадут либо со множеством всех нулей, либо со множеством всех единиц. Но число нулей не равно числу единиц (сумма чисел нечетна!). Значит, каких-то цифр – не  $k$  штук. Загнав поворотом такую цифру на одно из выбранных  $k$  мест, мы не дадим Али-Бабе выиграть следующим ходом.

Случай, когда  $N$  четно, но имеет нечетный делитель  $m$ , сводится к разобранному. Отметим на большом круге  $m$  равноотстоящих мест и забудем про остальные. Действуя, как описа-

но выше, мы сможем помешать Али-Бабе уравнивать все цифры на отмеченных местах.

Алгоритм выигрыша Али-Бабы для  $2^k$  мест будем строить индуктивно. База для  $k = 1$  очевидна. Пусть у нас есть алгоритм  $A_m$  для  $m$  мест. Построим  $A_{2m}$ . Начнем с частных случаев. Разобьем круг на  $m$  пар противоположных мест и установим соответствие между парами для  $2m$  и местами для  $m$ .

1) Пусть мы знаем, что в каждой паре цифры равны. Применим алгоритм  $A_m$ , заменяя места целыми парами. Ясно, что когда замок открылся там, он откроется и тут.

2) Пусть мы знаем, что четность суммы в каждой паре одинакова. Применим  $A_m$  для пар. Если не открылось, то все суммы были нечетны. Но меняя оба числа пары, мы не меняем четности. Значит, все суммы остались нечетными. Изменим  $m$  цифр подряд (назовем эту операцию  $D$ ). Теперь все суммы четны. Еще раз применив  $A_m$  для пар, откроем замок. Назовем алгоритм для этого случая  $B$ .

3) Применим теперь  $A_m$  для пар другим способом: цель – сделать суммы в парах одной четности. По-прежнему на каждом шагу мы выбираем набор пар согласно  $A_m$ , но меняем в каждой выбранной паре только по одной цифре. Назовем алгоритм  $C$ . Он гарантирует, что на каком-то шагу (мы не знаем, на каком) четности сумм совпадут. Дверь это, понятно, не откроет. Но мы схитрим: после каждого шага  $C$  применим  $B$ , а затем  $D$ . При совпадении сумм четностей  $B$  откроет дверь, а иначе  $BD$  не изменит четностей сумм.

# Квант

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов,  
С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова,  
А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, В.М.Хлебникова,  
П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ  
по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: 930-56-48

E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info,

phys@kvant.info

Сайт: kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени  
«Чеховский полиграфический комбинат»

142300 г.Чехов Московской области,

Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru

Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00

Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59



Индекс 70465

«Явления, наблюдаемые при горении свечи, таковы, что нет ни одного закона природы, который при этом не был бы так или иначе затронут»  
**(М. Фарадей, 1860)**. Попробуем и мы спустя 150 лет убедиться в справедливости этих слов великого английского физика.



*Уроки с физикой*

Пока горит свеча... или кристалл



$$\lambda_{\text{пар}} = \frac{Q_{\text{вода}} \cdot t_3}{m_{\text{пар}}} = \frac{m_{\text{вода}} \cdot c_{\text{вода}} \cdot t_3}{m_{\text{пар}}} \approx 600 \text{ кДж} \cdot \text{кг}^{-1},$$

*Уроки с физикой*

(Продолжение – на странице 31 внутри журнала)